Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux
Andreas Hermann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

2. Übungsblatt

Abgabe am 3.11.2009 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Wir betrachten $\mathbb{Z}^n$ als Untergruppe von $\mathbb{R}^n$. Wie in der Gruppentheorie definieren wir die Relation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Der dazu gehörige Quotient $M^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ heißt *n-dimensionaler Torus.*

1. Zeigen Sie, dass M^n ein kompakter Hausdorff-Raum ist.
2. Konstruieren Sie einen C^∞-Atlas auf M^n, so dass die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$ glatt und lokal glatt umkehrbar ist.
3. Zeigen Sie, dass M^n diffeomorph zu $\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n\text{-mal}}$ ist.
4. Zeigen Sie im Fall $n = 2$, dass M^2 diffeomorph zum Drehtorus $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = 2\}$ ist.

2. Aufgabe
Es bezeichne $G(3, 2)$ die Menge der 2-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. Auf $G(3, 2)$ lässt sich eine Topologie folgendermaßen definieren: eine Teilmenge U von $G(3, 2)$ ist genau dann offen, wenn

$$\{x \in S^2 \mid x \perp E \text{ für ein } E \in U\}$$

bezüglich der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie eine offene Teilmenge von S^2 ist.
Zeigen Sie:

1. Ist $E \in G(3,2)$ mit $e_3 \notin E$, so existiert genau ein $(m_1, m_2)^T \in \mathbb{R}^2$ so, dass $E = \{(x_1, x_2, m_1x_1 + m_2x_2)^T \,|\, (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2\}$ gilt.

2. Seien $U_i := \{E \in G(3,2) \,|\, e_i \notin E\}$ und $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die analog zu Aufgabenteil 1 definierten Abbildungen ($i \in \{1,2,3\}$). Dann bilden die (U_i, φ_i) einen 2-dimensionalen C^∞-Atlas für $G(3,2)$.

3. Bezüglich der in Teil 2 definierten C^∞-Struktur auf $G(3,2)$ ist die Abbildung $G(3,2) \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $E \longmapsto E^\perp$, ein C^∞-Diffeomorphismus, wobei $E^\perp = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y \perp E\}$ das orthogonale Komplement von E im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

3. Aufgabe
Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei durch $\varphi(x) := x^3$ definiert.

1. Definieren die Atlanten $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})$ und $(\mathbb{R}, \varphi)$ die gleichen C^∞-Strukturen auf $\mathbb{R}$?

2. Sind die entsprechenden C^∞-Mannigfaltigkeiten diffeomorph?

4. Aufgabe

1. Sei $\varphi : M \longrightarrow N$ ein Homöomorphismus zwischen topologischen Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie: Trägt N eine C^∞-Struktur, so kann M mit einer C^∞-Struktur versehen werden, so dass φ ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

2. *Anwendung*: Zeigen Sie, dass das Quadrat
$$Q := [-1,1] \times \{-1,1\} \cup \{-1,1\} \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$$
eine 1-dimensionalen C^∞-Struktur trägt.

3. Zeigen Sie, dass Q dennoch keine 1-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.