Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann

WS 2009/10

Semi-Riemannsche Geometrie

1. Übungsblatt

Abgabe am 27.10.2009 in der Vorlesung

1. Aufgabe
Seien $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty, \omega\}$. Zeigen Sie, dass jeder m-dimensionale C^k-Atlas in genau einer m-dimensionalen C^k-Struktur liegt.

2. Aufgabe
Sei $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Man identifiziere $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mit der Quotientenmenge $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/_\sim$, wobei $x \sim y \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^\times$ s.d. $x = \lambda y$, und versehen es mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ein kompakter Hausdorffscher topologischer Raum ist, dessen Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$U_j := \{[x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_j \neq 0\} \xrightarrow{\varphi_j} \mathbb{R}^n, \quad [x] \longmapsto \frac{1}{x_j}(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{n+1})$$

   (mit $1 \leq j \leq n+1$), wohldefiniert sind und einen C^0-Atlas von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ bilden (mit "$\widehat{x_j}$" ist "ohne x_j" gemeint).

3. Zeigen Sie, dass dieser Atlas C^ω ist und leiten Sie daraus her, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ eine Struktur einer n-dimensionalen C^ω-Mannigfaltigkeit trägt.

3. Aufgabe
Definieren Sie eine C^k-Struktur auf dem Produkt $M \times N$ zweier C^k-Mannigfaltigkeiten M und N so, dass die Projektionen $M \times N \longrightarrow M$ und $M \times N \longrightarrow N$ C^k-Abbildungen sind.