Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2006–2007
Feuille 13 — 6 décembre 2006

1

Est-ce que les nombres suivants sont constructibles sur $\mathbb{Q}$?
$\sqrt{1+\sqrt{5}}$, $\sqrt{(1/5)+2\sqrt{7/9}}$, $\sqrt[3]{9+6\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{2+3\sqrt{3}}$, $\cos\pi/3$, $\tan\pi/3$, $\cos\pi/5$.

2

Décomposer le polynôme $P = 6X^5 - 29X^4 + 45X^3 - 39X^2 + 39X - 10$ en facteurs irréductibles sachant qu'il y a des racines rationelles. On suppose que $r = p/q$ est une racine de P avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $pgcd(p,q) = 1$.

(a) Montrer que $p|10$ et $q|6$.

(b) Montrer que $5|p$ ou
$$pq \equiv \pm 2 \mod 5$$
Indication: Étudier $q^5 P(p/q) \mod 5$

(c) Si $p = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$ montrer que
$$k \equiv -2q \mod 5.$$
Indication: Étudier $q^5 P(p/q) \mod 25$

(d) Montrer que P n'a pas de racine $r \in \mathbb{C}$ avec $|r| \geq 10$

(e) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

3

(a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$ dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$ dans $\mathbb{R}[X]$.

4

Démontrer que $1 + (X-1)^2(X-3)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

5

Trouver les racines de $P = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 15X + 5$ sachant que deux racines a_1 et a_2 vérifient $a_1 a_2 = 5$.
Indication: Écrire $P = (X^2 + tX + 5)(X^2 + aX + b)$

6 Soit $A = \mathbb{Z}[X]$. Parmi les idéaux suivants, lesquels sont principaux ?

(a) $\langle X, 2\rangle_{\text{ideal}}$,

(b) $\langle X+1, X^2-1\rangle_{\text{ideal}}$;

(c) $\langle 3X^3+2X^2+1, X^2-1, X+1\rangle_{\text{ideal}}$.

(d) $\langle 3X^3+2X^2+1, X^2-1, X^4+2\rangle_{\text{ideal}}$.

7 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la fonction polynomiale associée $\widetilde{P}$ est périodique. Montrer que le polynôme P est constant.

8 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $t \in \mathbb{Z}$, $s = P(t)$. Montrer que s divise $P(s+t)$.

9 Soit $\mathbb{K}$ un corps, et

$$\mathcal{A} := \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, \text{dont le coefficient de } X \text{ est nul}\}.$$

Démontrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau non principal de $\mathbb{K}[X]$.

10 Calculer le pgcd des polynômes P et Q suivants à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) $P = X^4+X^3-3X^2-4X-1$
$Q = X^3+X^2-X-1$

(b) $P = X^4-10X^2+1$
$Q = X^4-4X^3+6X^2-4X+1$

(c) $P = X^5-iX^4+X^3-X^2+iX-1$
$Q = X^4-iX^3+3X^2-2iX+2$

11 Montrer que les polynômes P et Q suivants sont premiers entre eux. Trouver $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UP+VQ=1$.

(a) $P = X^4+X^3-2X+1$
$Q = X^2+X+1$

(b) $P = X^3+X^2+1$
$Q = X^3+X+1$

12

Factoriser X^8+X^4+1 sur $\mathbb{R}$.

`http://www.iecn.u-nancy.fr/~ammann/alg3`