

**1** Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier ou démontrer le contraire.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{1/27} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}] & \sqrt{1 + \sqrt{2}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] & \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \\ \sqrt{29 - 6\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}] & \sqrt[3]{-7 + 5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}] & \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \in \mathbb{Q}[\sqrt{10}] \end{array}$$

**2** Soit  $z_i \in \mathbb{C}$  avec  $z_i^2 = y_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . Est-ce que  $z_i \in \mathbb{Q}[w_i]$  pour

- (a)  $y_1 = \frac{1}{4} - i\sqrt{3}$ ,  $w_1 = i\sqrt{3}$ ;
- (b)  $y_2 = \frac{1}{2} + i\sqrt{2}$ ,  $w_2 = i\sqrt{2}$ ;
- (c)  $y_3 = \frac{1}{2} + i\sqrt{3}$ ,  $w_3 = i\sqrt{3}$  ?

**3** Calculer le polynôme de minimal

- (a) de  $\sqrt[4]{2}$  dans  $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}])[X]$ ,
- (b) de  $2 + \sqrt{3}$  dans  $(\mathbb{Q})[X]$ ,
- (c) de  $\sqrt{5} + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$  dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

**4** Calculer  $[\mathbb{Q}[e^{2\pi i/3} \sqrt[3]{3}] : \mathbb{Q}]_{\text{corps}}$ ,  $[\mathbb{R}[e^{2\pi i/3} \sqrt[3]{3}] : \mathbb{R}]_{\text{corps}}$ ,  $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{1 + \sqrt{3}}] : \mathbb{Q}]_{\text{corps}}$ , et  $[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{-7 + 5\sqrt{2}}] : \mathbb{Q}]_{\text{corps}}$ .

**5**

- (a) Montrer que le polynôme  $P = X^3 - 3X^2 + 9X - 3$  n'a pas de racines rationnelles.
- (b) Soit  $x$  une racine réelle de  $P$ . Le nombre  $x$  est-il constructible sur  $\mathbb{Q}$  ?

**6** Montrer que  $\overline{\mathbb{Q}}$  est un corps.