Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2006–2007
Feuille 11 — 23 novembre 2006

---

1 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

2 Étudier la divisibilité de $aX^4 + bX^3 + 1$ par $(X-1)^2$ suivant les valeurs de a et b dans $\mathbb{R}$.

3 Discuter suivant les valeurs de l'entier $n \geq 2$ l'ordre de multiplicité de 1 comme racine du polynôme $P_n = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

4 Trouver le polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal admettant 1 comme racine double, 2 et $1+i$ comme racines simples.

5 Soit $P_n = \dfrac{1}{n!}X^n + \dfrac{1}{(n-1)!}X^{n-1} + \cdots + X + 1$. P_n admet-il des racines multiples dans $\mathbb{C}$?

6 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$; montrer que si $X-1$ divise $P(X^n)$, alors $X^n - 1$ divise $P(X^n)$.

7 Quelle(s) relation(s) doivent vérifier les nombres complexes p et q pour que le polynôme $X^3 + pX + q$ ait une racine au moins double dans $\mathbb{C}$?

8 On considère les polynômes $P(X) = X^5 + X - \bar{2}$ et $Q(X) = X^3 - \bar{2}X + \bar{1}$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,[X]$ et $f(x) = \widetilde{P}(x)$, $g(x) = \widetilde{Q}(x)$ les fonctions polynomiales associées dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Comparer f et g.

9 Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $P(-1) = 4$; $P(1) = 2$; $P(3) = 64$.

10 Soit $P = X^4 - 12X^3 + 4X^2 - 11X + 23$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ses racines complexes. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \alpha_i^3$.

11 Soit $P = X^3 + 2X + 5$ et α, β, γ ses racines complexes. Calculer $\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta$.

12 Soit $P = 2X^3 - X^2 - 8X + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Trouver λ pour que P admette deux racines complexes opposées l'une de l'autre.

(b) Trouver λ pour que P admette deux racines complexes inverses l'une de l'autre.

13 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $m = qn + r$ la division euclidienne de m par n.

(a) Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$ est $X^r - 1$.

(b) Soit $d = pgcd(m, n)$. Montrer que le *pgcd* de $X^m - 1$ et $X^n - 1$ est $X^d - 1$.

14 On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :
$P_1 = 1$; $P_2 = X$ et $\forall n \geq 3,\ P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{2n}(0) = 0$ et $P_{2n+1}(0) = (-1)^n$.

(b) Montrer que $\forall n \geq 2,\ P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1} = 1$.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux. Vérifier ce résultat sur P_3 et P_4 par l'algorithme d'Euclide.

15

(a) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n s'écrivant : $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$. Montrer que si P admet une racine rationnelle $r = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers non nuls premiers entre eux, alors $q|a_n$ et $p|a_0$.

(b) Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants : $2X^4 - 3X^3 - 2X + 3$.

16 Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos\alpha X^n + 1$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

17

(a) Montrer que le polynôme $P = \dfrac{1}{2i}[(X + i)^n - (X - i)^n]$ de $\mathbb{C}[X]$ est en fait à coefficients réels.

(b) Calculer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

(c) Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.