Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2006–2007
Feuille 10 16 novembre 2006

1

Soit L un corps communtatif, et K un sous-annau unitaire qui est aussi un corps. Soient $z \in L \setminus K$ et $P \in K[X]$ avec $P \neq 0$ et $P(z) = 0$. Posons $n := \deg P$.

(a) Montrer que
$$K[z] := \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \mid a_0, \ldots, a_{n-1} \in K \right\}$$
est un sous-anneau unitaire de L.

(b) Montrer que tout sous-anneau A de L avec $z \in A$ et $K \subset A$ contient $K[z]$ comme un sous-ensemble.

(c) Soit $\iota : K \to L$ l'inclusion. Utiliser l'application
$$\mathrm{ev}_z^\iota : K[X] \to L$$
pour construire un isomorphisme d'anneau unitaire
$$K[X]/(\ker \mathrm{ev}_z^\iota) \to K[z].$$

(d) Soit Q le polynôme unitaire tel que $(Q) = \ker \mathrm{ev}_z^\iota$. Montrer que Q est irréductible. *Indication: Utiliser que L est intègre.*

(e) Soit $R \in K[X]$ avec $R(z) \neq 0 \in L$. Montrer que le polynôme Q de (d) ne divise pas R.

(f) En utilisant Lemme V.5.4 montrer que $I = K[X]$ est le seul idéal de $K[X]$ contenant Q et R. En déduire l'existence de $A, B \in K[X]$ tels que
$$AQ + BR = 1.$$

(g) Montrer que $K[z]$ est un corps.