Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2006–2007
Feuille 8 — 8 novembre 2006

---

1 Déterminer $(\mathbb{Q}[X])^*$, $(\mathbb{Z}[X])^*$ et $((\mathbb{R}[X])[Y])^*$.

2

Soit $P := X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Calculer $P \circ Q$ où $Q = X + 3$.

(b) Calculer $P \circ P$.

3 Soient

$$\varphi : \mathbb{R} \to M_k(\mathbb{R}), \quad \varphi(r) := r \cdot 1_{M_k(\mathbb{R})},$$

et $P = X^2 + 1$, $Q = X^4 + X^2 + 1$, $R = X^4 - 1$. Calculer $\mathrm{ev}_{\mathrm{B}}^{\varphi}(P)$, $\mathrm{ev}_{\mathrm{B}}^{\varphi}(Q)$ et $\mathrm{ev}_{\mathrm{B}}^{\varphi}(R)$ pour

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Souvent on note $P(B) := \mathrm{ev}_{\mathrm{B}}^{\varphi}(P)$.

4 Trouver le reste de la division euclidienne de $X^{32} + X^{18} + 1$ par $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

5 Calculer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ par $X^2 - X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

6 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P admet 7, (resp. -2 et 5) comme reste de la division euclidienne par $X - 1$ (resp. $X - 2$ et $X - 4$). Trouver le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-4)$.