**Exercices d'Algèbre 3**
**Bernd Ammann, 2006–2007**
Feuille 7 2 octobre 2006

---

## 1

Les ensembles suivants sont-ils des anneaux ? unitaires ? commutatifs ? intègres ? des corps ?

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] := \{a + b\sqrt{3}/\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] := \{a + b\sqrt{3}/\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(c) $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] := \{a + ib\sqrt{2}/\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(d) $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib/\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(e) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels.

(f) $GL_n(\mathbb{R})$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.

(g) $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications d'un ensemble $E$ dans $\mathbb{R}$.

(h) $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(i) L'ensemble des suites réelles.

(j) L'ensemble des suites réelles bornées.

(k) $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$.

(l) L'ensemble des entiers pairs.

(m) L'ensemble des entiers impairs.

## 2

(a) Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois suivantes

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac, bd) \end{aligned}$$

est un anneau commutatif unitaire. Est-ce un corps?

(b) Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois suivantes

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) * (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

est un corps.

(c) Montrer que l'application $\varphi : (a, b) \longmapsto a + ib$ est un isomorphisme de corps de $(\mathbb{R}^2, +, *)$ sur $(\mathbb{C}, +, \times)$.

## 3

(a) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}$.

(b) On considère sur l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ l'application $N(z) = z\overline{z}$.

(i) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) \in \mathbb{N}$.
(ii) Montrer que $(\mathbb{Z}[i])^* = \{z \in \mathbb{Z}[i]/N(z) = 1\}$.
(iii) En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

(c) De même déterminer les éléments inversibles de l'anneau $Z[i\sqrt{2}]$ et de l'anneau $\mathbb{Z}[j]$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

## 4

Les ensembles suivants sont-ils des idéaux?

(a) $n\mathbb{Z}$ dans l'anneau $\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(b) $\{P \in \mathbb{R}[X]/\ P(\alpha) = 1\}$ dans $\mathbb{R}[X]$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

(c) L'ensemble des suites réelles convergeant vers 0 dans l'anneau des suites bornées.

(d) L'ensemble des suites réelles convergeant vers 1 dans l'anneau des suites bornées.

(e) L'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dans l'anneau $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(f) $\mathbb{R}_n[X]$ dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$.

## 5

Montrer la formule du binôme de Newton dans un anneau commutatif.

## 6

(a) Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'un anneau commutatif unitaire $\mathcal{A}$. Montrer les équivalences suivantes :

$$\mathcal{I} = \mathcal{A} \Longleftrightarrow 1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{I} \Longleftrightarrow \mathcal{I} \cap \mathcal{A}^* \neq \emptyset$$

(b) Soit $\mathcal{A}$ un corps commutatif et soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$ non réduit à $\{0_{\mathcal{A}}\}$ : montrer que $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{I}$.

(c) Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire non réduit à $\{0_{\mathcal{A}}\}$ dont les seuls idéaux sont $\mathcal{A}$ et $\{0_{\mathcal{A}}\}$. Soit $a$ un élément non nul de $\mathcal{A}$ : en considérant l'idéal $(a)$, montrer que $a$ est inversible.

(d) Montrer qu'un anneau commutatif unitaire $\mathcal{A}$ non réduit à $\{0_{\mathcal{A}}\}$ est un corps si et seulement si ses seuls idéaux sont $\mathcal{A}$ et $\{0_{\mathcal{A}}\}$.