Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2006–2007
Feuille 6 29 septembre 2006

---

1 Montrer que le groupe S_4 contient un sous-groupe normal H isomorphe au groupe engendré par les symétries orthogonales du rectangle.

2 Soit K un sous-groupe de G, et soit H un sous-groupe normal de G. Montrer que $K \cap H$ est un sous-groupe normal de K.

3 Soit $\mathcal{G}$ un groupe, et soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe d'indice 2. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe normal de $\mathcal{G}$.

4 Montrer que le groupe $Sl(n,\mathbb{R}) := \{A \in Gl(n,\mathbb{R}) |\, \det A = 1\}$ est un sous-groupe distingué du groupe $Gl(n,\mathbb{R})$. Montrer que $Gl(n,\mathbb{R})/Sl(n,\mathbb{R})$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

5 Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 6, 7, 8 et 10.

6 Exprimer comme produits des cycles disjoints $\sigma_1 = (123)(45)(16789)(15) \in S_9$, $\sigma_2 = (12)(123)(12)$,

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

et

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 9 & 7 & 3 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in S_9.$$

Calculer $(\sigma_1)^{100}$, $(\sigma_2)^{1000}$, $(\sigma_3)^{2006}$ et $(\sigma_4)^{2007}$.