Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2006–2007
Feuille 5 — 20 septembre 2006

1

Soit G un groupe, $X = G$.

(a) Montrer que $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto gxg^{-1}$ est une action de G sur soi-même. (On appelle cette action la conjugaison.)

(b) Montrer que $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto xg^{-1}$ est une action de G sur soi-même (dite la multiplication à droite).

(c) Est-ce que $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto xg$ est une action de G sur soi-même ?

2

Soit G un groupe, $X := \mathrm{App}(G, \mathbb{R})$. Montrer que

$$A : G \times X \to X, \qquad (g,f) \mapsto \big(h \mapsto f(g^{-1}h)\big)$$

définit une action de G sur X.

3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $G = \{(B,v) \,|\, B \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^n\}$. On munit G avec la multiplication

$$(B_1, v_1) \cdot (B_2, v_2) = (B_1 B_2, v_1 + B_1 v_2)$$

(a) Montrer que G est un groupe.

(b) Montrer que $H := \{(1_n, v) \,|\, v \in \mathbb{R}^n\}$ est un sous-groupe normal.

(c) Montrer que $G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $((b_1, v_1), x) \mapsto v_1 + B_1 x$ est une action de G sur $\mathbb{R}^n$.

4

Décomposer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) en cycles disjoints et
(b) en transpositions.

5

Soit X l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}$. Montrer que

$$A : S_n \times X \to X, \qquad (\sigma, f) \mapsto \big((x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\big)$$

est une action de G sur X.