Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2006–2007
Feuille 4 13 septembre 2006

---

1 Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. Déterminer le sous-groupe engendré par $\{n, m\}$.
Indication: Il est utile d'utiliser la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

2 Soit $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \; / \; z^n = 1\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{U} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$. Montrer que $\mathrm{ord}(\mathbb{U}) = \infty$, mais que $\mathrm{ord}(x) < \infty$ pour tout $x \in \mathbb{U}$.

3 Soit G le groupe de symétries d'un triangle équilatéral. Déterminer tous les sous-groupes de G. Parmi eux, lesquels sont normaux?

4 Soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 1 ou 2.

(a) Montrer que G est commutatif.

(b) Soit $x \in G$, $x \neq e$. Montrer que tous les éléments de $G/\langle x\rangle$ sont d'ordre 1 ou 2.

(c) Supposons en plus que G est d'ordre fini. Montrer que l'ordre de G est une puissance de 2.

5

(a) Soit G un groupe. On munit l'ensemble des automorphismes de G, noté $\mathrm{Aut}(G)$ avec la composition. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe.

(b) Soit $\mathrm{Inn}(G)$ le sous-ensemble des automorphismes intérieurs. Montrer que $\mathrm{Inn}(G)$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(G)$.

6 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier. Déterminer tous les automorphismes de groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

7 Résoudre les systèmes d'équations suivants

$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 4 \\ n \equiv 5 \pmod 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} n \equiv -1 \pmod 4 \\ n \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$$

8 Résoudre les systèmes d'équations suivants

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 4 \\ n \equiv 3 \pmod 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} n \equiv 3 \pmod 4 \\ n \equiv 2 \pmod 6 \end{cases}$$

`http://www.iecn.u-nancy.fr/~ammann/alg3`