Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2006–2007
Feuille 3 — 11 septembre 2006

---

1 Montrer que $\mathbb{R}$ muni de la loi $*$ définie par :

$$x * y = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$$

est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
(On pourra considérer l'application $x \longrightarrow \sqrt[3]{x}$).

2 Soit G l'ensemble des matrices $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in]-1, 1[$. Montrer que G est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}\ ,\ +)$ (considérer l'application $u \mapsto \tanh u$).

3 Soit : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}\ :\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{U}_n \\ \overline{k} &\longmapsto \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

(a) Montrer que l'application $\overline{\varphi}$ est bien définie et est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{U}_n$.

(b) Quels sont les éléments $z \in \mathbb{U}_n$ tels que $\mathbb{U}_n = \langle z \rangle$?

4 Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre p est cyclique.

5 Déterminer, à isomorphisme près, les groupes d'ordre 1, 2, 3, 4 et 5.

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit G l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que G muni avec la multiplication est un groupe commutatif. Déterminer l'ordre de G.

7 Soit G le groupe multiplicatif formé par les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

(a) (i) Montrer que $G = \{\overline{1}, -\overline{1},\ \overline{5}, -\overline{5},\ \overline{7}, -\overline{7},\ \overline{11}, -\overline{11}\}$.

(ii) Ecrire la table du groupe G.

(iii) Calculer les ordres des éléments de G ; G est-il cyclique ?

(b) Soit H un sous-groupe de G : quelles sont les valeurs possibles pour l'ordre de H ?

(c) Déterminer tous les sous-groupes de G d'ordre 2.

(d) Soit H un sous-groupe de G d'ordre 4.

(i) Montrer que si $-\overline{1} \in H$, alors H est de la forme $H = \{\overline{1}, -\overline{1},\ \overline{a}, -\overline{a}\}$ où $\overline{a} \in \{\overline{5},\ \overline{7},\ \overline{11}\}$.

(ii) Montrer que si $-\overline{1} \notin H$, alors H est de la forme $H = \{\overline{1},\ \overline{a},\ \overline{b},\ \overline{ab}\}$ où $\overline{a}$ et $\overline{b}$ sont distincts, différents de $\overline{1}$ et de $-\overline{1}$ et où $\overline{b} \neq -\overline{a}$.

(e) Expliciter tous les sous-groupes de G.

(f) On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \langle -\overline{1} \rangle \times \langle \overline{5} \rangle \times \langle \overline{7} \rangle & \longrightarrow & G \\ & (\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}) & \longmapsto & \overline{abc} \end{array}$$

(a) Montrer que φ est un isomorphisme de groupes.

(b) En déduire que $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

(g) Soit G_1 le groupe multiplicatif formé par les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

(a) Déterminer les éléments de G_1.

(b) Calculer les ordres des éléments de G_1 .

(c) G et G_1 sont-ils isomorphes ?