Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2006–2007
Feuille 2 — 7 septembre 2006

---

1 Montrer que $10^n + 9$ est multiple de $7 \Longleftrightarrow 10^n + 9$ est multiple de 13.

2 Trouver tous les entiers n tels que $n^4 - 1$ est multiple de 15.

3 Ecrire les tables de multiplication de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

4 Montrer que $\forall a \in \mathbb{Z},\ a^7 - a$ est multiple de 42.

5 Montrer que p et $8p^2 + 1$ premiers $\Longrightarrow p = 3 \Longrightarrow 8p^2 - 1$ premier.

6 Les ensembles suivants sont-ils des groupes ? $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ,\cdot)$ $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{\overline{0}\}\ ,\cdot)$, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 1\}$ et $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}\ /\ z^n = 1\}$ pour la multiplication, $\{A \in M_n(\mathbb{R})/\ \det(A) = 1\}$ et $\{A \in M_n(\mathbb{R})/\ \det(A) = -1\}$ pour la multiplication, $\{A \in M_n(\mathbb{R})/\ \det(A) = 0\}$ pour l'addition, $\{A \in M_n(\mathbb{R})/\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$ pour l'addition.

7 Montrer que $\mathbb{R} - \{-1\}$ muni de la loi $*$ définie par

$$x * y = x + y + xy$$

est un groupe commutatif.

8 Soit $G =]-1, 1[$ muni de la loi $*$ définie par

$$\forall x, y \in G, \quad x * y := \frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

9 Soit G le groupe des symétries d'un rectangle (qui n'est pas un carré) dans le plan, muni de la loi de la composition des applications. Donner une liste des éléments de G. Écrire le table de groupe. Qu'est-ce qui se passe, si le rectangle est un carré ?

10 Combien d'éléments contient le groupe des symétries d'un cube ? Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer les éléments d'ordre n.

`http://www.iecn.u-nancy.fr/~ammann/alg3`