Exercices en Géométrie Différentielle
Bernd Ammann, 2005–2006
Feuille 4 (Présence) 8 mars 2006

---

1 Soit $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ une courbe regulière injective, tel que $M := \gamma(]a, b[)$ est une sous-variété. Soit $p = \gamma(t_0)$. Montrer que la deuxième form fondamentale $II_p : T_pM \times T_pM \to N_pM$ satisfait

$$II_p(X, X) = \|X\|^2 K_\gamma(t_0)$$

pour tout $X \in T_pM$.

2 Soit M_f la surface de rotation donnée par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $H = c = const$ (on obtient une equation différentielle). Montrer que $cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une solution avec $H \equiv 0$.

3 On étudie l'application

$$\Psi_\alpha(u, v) = \begin{pmatrix} \sin\alpha\cosh u\cos v + \cos\alpha\sinh u\sin v \\ \sin\alpha\cosh u\sin v - \cos\alpha\sinh u\cos v \\ (\sin\alpha)u + (\cos\alpha)v \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que Ψ_α est une immersion de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer les g_{ij} associés à Ψ_α.

(c) Montrer que si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Psi_\alpha|_\Omega$ et $\Psi_\beta|_\Omega$ sont des paramérisations (i.e. des homéomorphismes sur son image), alors $\Psi_\alpha(\Omega)$ et $\Psi_\beta(\Omega)$ sont isométriques.

(d) Calculer un champ de vecteurs normals unitaires.

(e) Calculer les h_{ij}, la courbure moyenne H et la courbure de Gauss K.