Exercices pour le cours Géométrie différentielle
Bernd Ammann, 2005–2006

Feuille 4 — 2 février 2006

---

1 Pour $v,w \in T_pM$ on définit $\gamma_s(t) = \exp_p(t(v + sw))$. Faire un développement limité de du champ de Jacobi $\xi(t) := (d/ds)|_{s=0}\gamma_s(t)$ à l'ordre 2 en $t = 0$. En déduire le développement de $g(\xi(t),\xi(t))$ à l'ordre 4. En déduire que en coordonnées normaux

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}\, x^\alpha x^\beta g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) + O(x^3).$$

2 Soit N une hypersurface compacte dans la variété riemannienne (M,g). On suppose que ν est un champ normale, $\|\nu\| \equiv 1$. On définit $\varphi_t : N \to M$, $p \mapsto \exp_p(t\nu)$.
Montrer qu'il y a un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, l'application φ_t est un plongement de N dans M. Pour $p \in N$, $X \in T_pN$, étudier le champ de Jacobi $t \mapsto d\varphi_t(X)$. En déduire que

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\left((\varphi_t)^* g\right) = -2g(\mathrm{I\!I},\nu).$$

3 (Lemme de Synge.) Soit M une variété riemannienne de dimension n avec $K > 0$. Soit $\gamma : [0,a] \to M$ une géodésique avec $\dot\gamma(0) = \dot\gamma(a) \in T_pM$. Supposons que

$$\frac{d^2}{ds^2}|_{s=0}E[\gamma_s] \geq 0$$

pour tout variation γ_s de γ. Soit $P : T_pM \to T_pM$ le transport parallèle le long de γ. Alors, $\det P = (-1)^{n-1}$.
Indication: Montrer d'abord que si $\det P \neq (-1)^{n-1}$, *alors* 1 *est une valeur propre de* P.

TD: Jeudi 9 février 2006, 8:00 à 10:00, Salle 3??.
Rendez vos solutions dans mon casier, le 8 février jusqu'à 15:00 heures, s'il vous plaît.