Exercices pour le cours Géométrie différentielle
Bernd Ammann, 2005–2006
Feuille 3 — 25 janvier 2006

---

1 Soit V un fibré vectoriel sur une variété différentielle M avec une connexion ∇^V. On suppose que ∇ est une connexion sans torsion sur TM. On définit pour des champs de vecteurs X,Y,Z et pour une section v de V

$$R(X,Y)v := \nabla^V_X \nabla^V_Y v - \nabla^V_Y \nabla^V_X v - \nabla^V_{[X,Y]} v,$$

$$(\nabla_X R)(Y,Z)v := \nabla^V_X (R(Y,Z)v) - R(\nabla_X Y,Z)v - R(Y,\nabla_X Z)v - R(Y,Z)\nabla^V_X v$$

Montrer que R et ∇R sont des tenseurs, plus exactement $R \in T^*M \otimes T^*M \otimes V^* \otimes V$ et $\nabla R \in T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes V^* \otimes V$. Montrer la deuxième identité de Bianchi

$$(\nabla_X R)(Y,Z)v + (\nabla_Y R)(Z,X)v + (\nabla_Z R)(X,Y)v = 0.$$

Indication: Ou utiliser le cour de Berard-Bergery ou utiliser l'identité de Jacobi pour ∇^V_X comme expliqué dans le livre d'O'Neill.

2 Soit (M,g) une variété riemannienne. Pour un (2,0)-tenseur symétrique h on définit le 1-forme $\operatorname{div} h$ comme

$$(\operatorname{div} h)(X) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} h)(e_i,X)$$

où $p \in M$, $X \in T_pM$ et $e_1,\ldots,e_n$ est une base orthonormée de T_pM. C'est la *divergence* de h. Montrer que pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a

$$\operatorname{div}(fg) = df \qquad \text{et} \qquad d\,\mathrm{scal} = 2\ \operatorname{div}\ \mathrm{ric}.$$

3 Soit (M,g) une variété riemannienne connexe de dimension ≥ 3, tel que $\mathrm{ric} = fg$ pour une fonction $f \in C^\infty(M)$. Montrer que f est constante.

4 Supposons que (M,h) est une variété riemannienne de dimension n telle que $\mathrm{ric} = cg$ òu c est une constante. On appelle des telles variétés riemanniennes des variétés Einstein. Supposons que N est une hypersurface dans M est que $scal^N$ est la courbure scalaire de N par rapport à la métrique $h = g|_{TN\times TN}$. On note II la deuxième forme fondamentale et ν un champ de vecteurs normal de longueur 1. Alors $\ddot{u} := g(II,\nu)$ est un (2,0)-tenseur symétrique sur N. On définit $|\ddot{u}|_2^2 := \sum_{i,j=1}^{n-1} \ddot{u}(e_i,e_j)^2$ pour une base orthonormée $e_1,\ldots,e_{n-1}$ de T_pN.
Montrer que

$$\operatorname{div} \ddot{u} = d(\mathrm{tr}\ddot{u})$$

$$-(\mathrm{tr}\ddot{u})^2 + |\ddot{u}|_2^2 + \mathrm{scal}^N = c(n-2)$$

Ces équations s'appellent "Einstein constraint equations" et jouent un rôle éminent en rélativité générale.

TD: 1 février janvier 2006, 14:00 à 16:00, Salle 113.
Rendez vos solutions dans mon casier, le 31 janvier jusqu'à 15:00 heures, s'il vous plaît.