Exercices pour le cours Géométrie différentielle
Bernd Ammann, 2005–2006
Feuille 2 — 10 janvier 2005

---

1 On suppose que $\exp_x$ est un difféomorphisme de V_x dans U_x. Alors $\varphi := (\exp_x|_{V_x})^{-1}$ sont des coordonnés normaux au point x. Montrer que

(a)
$$g_{ij}^{\varphi}(x) = \delta_{ij} \qquad \Gamma_{ij}^{k}(x) = 0$$
pour tout i,j,k,

(b)
$$g_{ij}^{\varphi}(\varphi^{-1}(v)) = \delta_{ij} + O(\|v\|^2)$$
pour tout $v \in V_x$.

2 Soit M la sous-variété de $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ donnée par la formule

$$M = \left\{(x,y)\,|\, x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1, \|y\| = 1\right\}.$$

Calculer la deuxième forme fondamentale $\mathrm{I\!I}$ de M dans $\mathbb{R}^5$. Utiliser le Theorema Egregium de Gauss pour en déduire le tenseur de courbure, le tenseur de Ricci et la courbure de scalaire de M.

3 Soient (M_1,g_1) et (M_2,g_2) deux variétés riemanniennes. Alors déterminer le tenseur de courbure, la courbure de Ricci et la courbure scalaire de $(M_1 \times M_2, g_\times g_2)$ comme une expression en tenseur de courbure de (M_1,g_1) et (M_2,g_2).

4 Soit V un espace vectoriel réel de dimension n avec un produit scalaire (positif), et soit $\mathcal{R}$ l'espace de toutes les applications trilinéaires

$$\alpha : V \times V \times V \to V$$

qui ont les symétries du tenseur de Riemann. Montrer que la dimension de $\mathcal{R}$ est

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12} = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 - n\binom{n}{3}$$

TD: 24 janvier 2006, 8:30 à 10:00, Salle 313.
Rendez vos solutions dans mon casier, le 23 janvier jusqu'à 15:00 heures, s'il vous plaît.

http://www.iecn.u-nancy.fr/~ammann/master