Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2005–2006
Feuille 12 — 6 décembre 2005

---

1 Les polynômes suivants sont-ils primitifs?

(a) $P = 6X^2 + 3X + 2$ dans $\mathbb{Z}[X]$

(b) $P = 6X^2 + 8X + 2$ dans $\mathbb{Z}[X]$

(c) $P = 6X^2 + 8X + 2$ dans $\mathbb{Q}[X]$

(d) $P = 5X^2 + iX + i$ dans $(\mathbb{Z}[i])[X]$

(e) $P = 6X^2 + (1+i)X + 2i$ dans $(\mathbb{Z}[i])[X]$

Si P n'est pas primitif, écrire P comme $P = aP^*$, P^* primitif.

2 Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$

(a) $P = 4X^3 - 14X^2 + 18$

(b) $P = 6X^4 - 3X^3 - 3X^2 - 3X + 9$

3 Démontrer que $X^4 + X + 1$ et $X^6 + X^2 + 1$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$.

4 Démontrer que $1 + (X-1)^2(X-3)^2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

5 Décomposer $2X^8 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$ et $X^8 - 16 \in \mathbb{Z}[X]$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $(\mathbb{Z}[i])[X]$.

6

Trouver les racines de $P = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 15X + 5$ sachant que deux racines a_1 et a_2 vérifient $a_1a_2 = 5$.
Indication: Écrire $P = (X^2 + tX + 5)(X^2 + aX + b)$