Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2005–2006
Feuille 11 4 décembre 2005

1

On décomposer le polynôme $P = 6X^5 - 29X^4 + 45X^3 - 39X^2 + 39X - 10$ en facteurs irréductibles sachant qu'il y a des racines rationelles. On suppose que $r = p/q$ est une racine de P avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $pgcd(p, q) = 1$.

(a) Montrer que $p|10$ et $q|6$.

(b) Montrer que $5|p$ ou
$$pq \equiv \pm 2 \qquad \mod 5$$
Indication: Étudier $q^5 P(p/q) \mod 5$

(c) Si $p = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$ montrer que
$$k \equiv -2q \qquad \mod 5.$$
Indication: Étudier $q^5 P(p/q) \qquad \mod 25$

(d) Montrer que P n'a pas de racine $r \in \mathbb{C}$ avec $|r| \geq 10$

(e) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2

(a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$ dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3

Soit $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[X]$. Soit I l'idéal engendré par 2 et X. Montrer que I n'est pas un idéal principal.

4

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la fonction polynomiale associée $\widetilde{P}$ est périodique. Montrer que le polynôme P est constant.

5

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $t \in \mathbb{Z}$, $s = P(t)$. Montrer que s divise $P(s + t)$.

6 Soit $\mathbb{K}$ un corps, et

$$\mathcal{A} := \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, \text{dont le coefficient de } X \text{ est nul}\}.$$

Démontrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau non principal de $\mathbb{K}[X]$.

7 Calculer le pgcd des polynômes P et Q suivants à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$
$Q = X^3 + X^2 - X - 1$

(b) $P = X^4 - 10X^2 + 1$
$Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$

(c) $P = X^5 - iX^4 + X^3 - X^2 + iX - 1$
$Q = X^4 - iX^3 + 3X^2 - 2iX + 2$

8 Montrer que les polynômes P et Q suivants sont premiers entre eux. Trouver $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.

(a) $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$
$Q = X^2 + X + 1$

(b) $P = X^3 + X^2 + 1$
$Q = X^3 + X + 1$

9

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.