Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2005–2006

Feuille 10 — 25 novembre 2005

1

Soit $\mathcal{A}$ un anneau comutatif intègre factoriel. Montrer que si $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ est irréductible, alors a est premier.

2

Soit $P = X^4 - 12X^3 + 4X^2 - 11X + 23$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ses racines complexes. Calculer $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2$ et $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i^3$.

3

Soit $P = X^3 + 2X + 5$ et α, β, γ ses racines complexes. Calculer $\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta$.

4

Soit $P = 2X^3 - X^2 - 8X + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Trouver λ pour que P admette deux racines complexes opposées l'une de l'autre.

(b) Trouver λ pour que P admette deux racines complexes inverses l'une de l'autre.

5

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $m = qn + r$ la division euclidienne de m par n.

(a) Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$ est $X^r - 1$.

(b) Soit $d = pgcd(m, n)$. Montrer que le *pgcd* de $X^m - 1$ et $X^n - 1$ est $X^d - 1$.

6

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :
$P_1 = 1$; $P_2 = X$ et $\forall n \geq 2,\ P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{2n}(0) = 0$ et $P_{2n+1}(0) = (-1)^n$.

(b) Montrer que $\forall n \geq 2,\ P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1} = 1$.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux. Vérifier ce résultat sur P_3 et P_4 par l'algorithme d'Euclide.

7

(a) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n s'écrivant : $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Montrer que si P admet une racine rationnelle $r = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers non nuls premiers entre eux, alors $q | a_n$ et $p | a_0$.

(b) Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants : $2X^4 - 3X^3 - 2X + 3$, $6X^5 - 29X^4 + 45X^3 - 39X^2 + 39X - 10$.

8

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos\alpha X^n + 1$ suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

9

(a) Montrer que le polynôme $P = \dfrac{1}{2i}[(X+i)^n - (X-i)^n]$ de $\mathbb{C}[X]$ est en fait à coefficients réels.

(b) Calculer les racines de P dans $\mathbb{C}$.

(c) Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.