Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2005–2006
Feuille 9 — 21 novembre 2005

1

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P admet 7, (resp. -2 et 5) comme reste de la division euclidienne par $X-1$ (resp. $X-2$ et $X-4$). Trouver le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-4)$.

2

Trouver le reste de la division euclidienne de $X^{32}+X^{18}+1$ par X^2+X+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

3

Calculer le reste de la division euclidienne de $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$ par X^2-X+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

4

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que P' divise P.

5

Étudier la divisibilité de aX^4+bX^3+1 par $(X-1)^2$ suivant les valeurs de a et b dans $\mathbb{R}$.

6

Discuter suivant les valeurs de l'entier $n \geq 2$ l'ordre de multiplicité de 1 comme racine du polynôme $P_n = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

7

Trouver le polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimal admettant 1 comme racine double, 2 et $1+i$ comme racines simples.

8

Soit $P_n = \dfrac{1}{n!}X^n + \dfrac{1}{(n-1)!}X^{n-1} + \cdots + X + 1$. P_n admet-il des racines multiples dans $\mathbb{C}$?

9

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$; montrer que si $X-1$ divise $P(X^n)$, alors X^n-1 divise $P(X^n)$.

10

Quelle(s) relation(s) doivent vérifier les nombres complexes p et q pour que le polynôme X^3+pX+q ait une racine au moins double dans $\mathbb{C}$?

11

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $P(1) = -2$; $P(2) = 5$; $P(3) = 1$; $P(-1) = 3$; $P(-3) = -4$ et $P(-2) = 7$.