Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2005–2006
Feuille 8 11 novembre 2005

1

Trouver tous les entiers n tels que $n^4 - 1$ est multiple de 15.

2

Écrire les tables de multiplication de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

3

Montrer que $\forall a \in \mathbb{Z},\ a^7 - a$ est multiple de 42.

4

(a) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + \bar{2}x - \bar{3} = \bar{0}$.

(b) Trouver tous les diviseurs de zéro de $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + \bar{2}x - \bar{3} = \bar{0}$.

5

Résoudre les systèmes d'équations suivants

$$\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 2 & (\mathrm{mod}\ 4) \\ n & \equiv & 5 & (\mathrm{mod}\ 7) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & -1 & (\mathrm{mod}\ 4) \\ n & \equiv & 2 & (\mathrm{mod}\ 7) \end{array}\right.$$

6

Résoudre les systèmes d'équations suivants

$$\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 1 & (\mathrm{mod}\ 4) \\ n & \equiv & 3 & (\mathrm{mod}\ 6) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 3 & (\mathrm{mod}\ 4) \\ n & \equiv & 2 & (\mathrm{mod}\ 6) \end{array}\right.$$

7

Trouver les entiers compris entre 700 et 4000 tels que le reste de la division par 17 (resp. 11 et 6) soit égal à 3 (resp. 4 et 5).

8

Résoudre les systèmes d'équations suivants successivement dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \bar{2}x + \bar{2}y & = & \bar{4} \\ \bar{5}x + \bar{3}y & = & \bar{3} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \bar{2}x - \bar{4}y & = & \bar{2} \\ \bar{1}x + \bar{5}y & = & \bar{2} \end{array}\right.$$

9

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = 2^\alpha 5^\beta b$ et $pgcd(10, b) = 1$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $10^k \equiv 1\ mod\ (b)$ puis qu'on peut trouver un multiple de a qui s'écrit sous la forme 99...900...0.

10

(a) Décomposer le polynôme $X^4 + 4$ en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

(b) Montrer que le seul nombre premier de la forme $n^4 + 4$ où $n \in \mathbb{Z}$ est 5.

(c) Soit $n \in \mathbb{Z}$; montrer que 5 divise $n^4 + 4 \Longleftrightarrow$ 5 ne divise pas n.

11

Soit $P := X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Calculer $P \circ Q$ où $Q = X + 3$.

(b) Calculer $P \circ P$.

(c) Soient

$$\varphi : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R}), \quad \varphi(r) := \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{ev}_{\mathrm{B}}^{\varphi}(P)$. *Remarque. Souvent on note* $P(B) := \mathrm{ev}_{\mathrm{B}}^{\varphi}(P)$.