Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2005–2006
Feuille 6 — 24 octobre 2005

---

1 Montrer que pour tout nombre premier $p > 3$, 24 divise $p^2 - 1$.

2 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $pgcd(2n + 18, n + 3) = 1$.

3 En utilisant la décomposition en facteurs premiers, montrer le lemme de Gauss (Corollaire 3.3.5 du cours): Soient $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(a) Si $a|bc$ et si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, alors $a|c$.

(b) Si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, $a|c$ et $b|c$, alors $ab|c$.

4 Soit p un nombre premier positif et k un entier, $1 < k < p$. Alors p divise

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!}.$$

5 Résoudre les équations suivantes :

(a) $57x + 141y = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$.

(b) $57x + 141y = 42$ dans $\mathbb{Z}^2$.

(c) $253x - 570y = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$ avec $x < 3000$ et $y > 1000$.

(d) $6x + 15y + 10z = 1$ dans $\mathbb{Z}^3$.