Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2005–2006
Feuille 5 — 17 octobre 2005

1

Soit D l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois définies par : $\forall(x,y),\ (x',y') \in \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

$$(x,y) \cdot (x',y') = (xx', xy' + yx')$$

On note $D_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $D_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $(D, +, \cdot)$ est un anneau commutatif.

(b) (i) D_1 et D_2 sont-ils des sous-anneaux de D ? Des idéaux de D ?

(ii) Soit $z = (a,b) \in D$ et soit $I_z = zD$ l'idéal de D engendré par z. Montrer que si $z \in D_2 - \{(0,0)\}$ alors $I_z = D_2$, et si $z \notin D_2$ alors $I_z = D$.

(iii) En déduire que les seuls idéaux de D sont $\{(0,0)\}$, D_2 et D.

(c) (i) D est-il un anneau intègre ? un corps ?

(ii) Montrer que $D^* = D - D_2$.

2

Montrer que

$$\left\{ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{C})$.

3

On munit $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4$ avec l'addition des vecteurs dans $\mathbb{R}^4$. Nous notons

$$\mathbf{1} := (1,0,0,0) \qquad i := (0,1,0,0) \qquad j := (0,0,1,0) \qquad k := (0,0,0,1).$$

(a) Montrer qu'il existe une unique application bilinéaire $\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, telle qu'on a $\mathbf{1}\cdot\mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}\cdot i = i \cdot \mathbf{1} = i$, $\mathbf{1}\cdot j = j\cdot\mathbf{1} = j$, $\mathbf{1}\cdot k = k\cdot\mathbf{1} = k$, $i\cdot i = j \cdot j = k\cdot k = -\mathbf{1}$, $i\cdot j = k$, $j\cdot i = -k$, $j\cdot k = i$, $k \cdot j = -i$, $k\cdot i = j$, $i \cdot k = -j$.

(b) Montrer que la multiplication $\cdot$ est associative.
Indication: On montre que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\to M_2(\mathbb{C}) \\ (a,b,c,d) = a\mathbf{1} + bi + cj + dk &\mapsto \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

presèrve la multiplication.

(c) En déduire que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ est un anneau non-commutatif.

(d) Déterminer l'ensemble G le plus petit, tel que $(G, \cdot)$ est un groupe et tel que $i, j \in G$. Quel est l'ordre de G?

(e) Montrer que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ est un anneau à division.

4

Montrer que

(a) $\forall n \in \mathbb{Z},\ 11 | 3^{n+3} - 4^{4n+2}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{Z},\ 6 | n(2n+1)(7n+1)$.

(c) $\forall n \in \mathbb{Z},\ 60 | n^2(n^4 - 1)$.

5

(a) Montrer que 2^{994} divise $1000!$ et que 2^{995} ne divise pas $1000!$.

(b) Trouver le plus grand entier $n \in \mathbb{N}$ tel que 3^n divise $1000!$.

6

Calculer le *pgcd* de :

(a) 4312 et 1755.

(b) $n-1$ et $n+1$.

(c) $n!+1$ et $(n+1)!+1$.

(d) n^2+1 et $n(n^2-1)$.