Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2005–2006

Feuille 3 — 30 septembre 2005

---

1 Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ des groupes, et $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ un homomorphisme. Soit $\mathcal{H}'$ un sous-groupe de $\mathcal{G}'$. Montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{H}')$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$.

2 Soient $n,m \in \mathbb{Z}$. Déterminer le sous-groupe engendré par $\{n,m\}$.
Indication: Il est utile d'utiliser la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

3 Soit $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{U} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_n$. Montrer que $\mathrm{ord}(\mathbb{U}) = \infty$, mais que $\mathrm{ord}(x) < \infty$ pour tout $x \in \mathbb{U}$.

4 Déterminer tous les sous-groupes de S_3. Parmi eux, lesquels sont normaux?

5 Soit $\mathcal{G}$ un groupe, et soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe d'indice 2. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe normal de $\mathcal{G}$.

6 Soit $\mathcal{G}$ un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 1 ou 2.

(a) Montrer que $\mathcal{G}$ est commutatif.

(b) Soit $x \in \mathcal{G}$, $x \neq e$. Montrer que tous les éléments de $\mathcal{G}/\langle x\rangle$ sont d'ordre 1 ou 2.

(c) Supposons en plus que $\mathcal{G}$ est d'ordre fini. Montrer que l'ordre de $\mathcal{G}$ est une puissance de 2.

7 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier. Déterminer tous les automorphismes de groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

8 Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 5, 6, 7 et 14.

9 Montrer que le groupe $Sl(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué du groupe $Gl(n,\mathbb{R})$. Montrer que $Gl(n,\mathbb{R})/Sl(n,\mathbb{R})$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

10 Montrer que

$$\mathcal{I} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

est un sous-groupe distingué de $SU(2)$ et montrer que $SU(2)/\mathcal{I}$ est isomorphe à $SO(3)$.