**Exercices d'Algèbre 3**
**Bernd Ammann, 2005–2006**
Feuille 2 — 19. septembre 2005

---

**1** Soit : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} \ : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow \ \mathbb{U}_n \\ \overline{k} \ &\longmapsto \ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

(a) Montrer que l'application $\overline{\varphi}$ est bien définie et est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{U}_n$.
(b) Quels sont les éléments $z \in \mathbb{U}_n$ tels que $\mathbb{U}_n = \langle z \rangle$ ?

**2** Déterminer tous les automorphismes de $S_3$.

**3** Montrer que le groupe $S_4$ contient un sous-groupe $\mathcal{G}$ isomorphe au groupe engendré par les symétries orthogonales du rectangle.

**4** Soit $p$ un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre $p$ est cyclique.

**5** Déterminer, à isomorphisme près, les groupes d'ordre 1, 2, 3, 4 et 5.

**6** Soit $\mathcal{G}$ le groupe multiplicatif formé par les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.
(a) (i) Montrer que $\mathcal{G} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{5}, -\overline{5}, \overline{7}, -\overline{7}, \overline{11}, -\overline{11}\}$.
 (ii) Ecrire la table du groupe $\mathcal{G}$.
 (iii) Calculer les ordres des éléments de $\mathcal{G}$ ; $\mathcal{G}$ est-il cyclique ?
(b) Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe de $\mathcal{G}$ : quelles sont les valeurs possibles pour l'ordre de $\mathcal{H}$ ?
(c) Déterminer tous les sous-groupes de $\mathcal{G}$ d'ordre 2.
(d) Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe de $\mathcal{G}$ d'ordre 4.
 (i) Montrer que si $-\overline{1} \in \mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}$ est de la forme $\mathcal{H} = \{\overline{1}, -\overline{1}, \overline{a}, -\overline{a}\}$ où $\overline{a} \in \{\overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$.
 (ii) Montrer que si $-\overline{1} \notin \mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}$ est de la forme $\mathcal{H} = \{\overline{1}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{ab}\}$ où $\overline{a}$ et $\overline{b}$ sont distincts, différents de $\overline{1}$ et de $-\overline{1}$ et où $\overline{b} \neq -\overline{a}$.
(e) Expliciter tous les sous-groupes de $\mathcal{G}$.
(f) On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \ \langle -\overline{1} \rangle \times \langle \overline{5} \rangle \times \langle \overline{7} \rangle &\longrightarrow \mathcal{G} \\ (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) &\longmapsto \overline{abc} \end{aligned}$$

 (a) Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de groupes.
 (b) En déduire que $\mathcal{G} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

(g) Soit $\mathcal{G}_1$ le groupe multiplicatif formé par les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

  (a) Déterminer les éléments de $\mathcal{G}_1$.

  (b) Calculer les ordres des éléments de $\mathcal{G}_1$ .

  (c) $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_1$ sont-ils isomorphes?