Exercices d'Algèbre 3
Bernd Ammann, 2005–2006

Feuille 1 — 12. septembre 2005

---

1 Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des symétries d'un rectangle dans le plan. Déterminer tous les éléments de $\mathcal{G}$. Montrer que $\mathcal{G}$ muni avec la composition est un groupe. Ècrire le table de groupe. Qu'est-ce qui se passe, si le rectangle est un carré?

2 Écrire le table du groupe des symétries d'un triangle équilatéral.

3 Les ensembles suivants sont-ils des groupes? $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ,+)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} - \{0\}\ ,\times)$, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| = 1\}$ et $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}\ /\ z^n = 1\}$ pour la multiplication, $\{A \in M_n(\mathbb{R})/\ \det(A) = 1\}$ et $\{A \in M_n(\mathbb{R})/\ \det(A) = -1\}$ pour la multiplication, $\{A \in M_n(\mathbb{R})/\ \det(A) = 0\}$ pour l'addition.

4 Soit $\mathcal{G} =]-1,1[$ muni de la loi $*$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathcal{G}^2, \quad x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(\mathcal{G},*)$ est un groupe commutatif.

5 Montrer que $\mathbb{R} - \{-1\}$ muni de la loi $*$ définie par

$$x * y = x + y + xy$$

est un groupe commutatif.

6 Montrer que $\mathbb{R}$ muni de la loi $*$ définie par:

$$x * y = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$$

est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R},+)$.
(On pourra considérer l'application $x \longrightarrow \sqrt[3]{x}$).

7 Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ pour $x \in]-1,1[$. Montrer que $\mathcal{G}$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}\ ,+)$ (considérer l'application $u \mapsto thu$).