Exercices d'Analyse de Fourier
Bernd Ammann et Emmanuel Humbert, 2005

Feuille 6 — 13 mai 2005

---

1 Soit T l'opérateur différentiel agissant sur les fonctions trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$ défini par $T = \frac{d^3}{dx^3} - \frac{d}{dx}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Trouver toutes les fonctions f 2π-périodiques et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que $Tf(x) = \cos(kx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Montrer que pour toute fonction f 2π-périodique, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et de moyenne nulle sur $[0, 2\pi]$, on a

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\, dt \;\leq\; \int_0^{2\pi} f'^2(t)\, dt.$$

En déduire que pour toute fonction f 2π-périodique et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\, dt \;\leq\; \int_0^{2\pi} f'^2(t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)\, dt\right)^2.$$

3 La série trigonométrique suivante est-elle une série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{\ln(n)}$$

d'une fonction Riemann-intégrable ?