Exercices d'Analyse de Fourier
Bernd Ammann et Emmanuel Humbert, 2005
Feuille 5 28 mars 2005

---

1 Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. On définit $T_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x).$$

Montrer que T_n est un polynôme de degré n.
(Indication. Montrer d'abord que $\cos((n+2)\alpha) + \cos(n\alpha) = 2\cos((n+1)\alpha)\cos\alpha$. *En déduire alors que* $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$*).*
On appelle T_n le polynôme de Tschebyscheff de degré n.

2 Soit

$$c(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que c est une courbe de Jordan lisse paramétrée. Dessiner la courbe. Montrer que sur l'intervalle $[0, \pi]$ la courbe c parcourt le graphe de la fonction

$$g_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 2\sqrt{1 - x^2}$$

et que sur l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ la courbe c parcourt le graphe de la fonction

$$g_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto -2\sqrt{1 - x^2}.$$

En effectuant un changement de variable, montrer que

$$\int_{-1}^{1} (g_1(x) - g_2(x))\, dx = -\int_0^{2\pi} x'(t)y(t)\, dt.$$

Calculer l'aire de la composante bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus \{c(t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Utiliser l'inégalité isopérimétrique pour en déduire une borne inférieure de $L(c)$.

3 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit la fonction f_α pour $x \in]-\pi, \pi]$ par $f_\alpha(x) = \cos(\alpha x)$. On prolonge f_α sur $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique.

(a) Calculer la série de Fourier de f_α.

(b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a:

$$cotan(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

(c) Soit $x \in]0, \pi[$ et notons pour $t \in [0, x]$, $g(t) = cotan(t) - \frac{1}{t}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = 0$. Vérifier que g est continue en 0. En intégrant g entre 0 et x et en utilisant la question précédente, montrer que

$$\int_0^x g(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

puis que

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

(d) En déduire que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a

$$\sin(x) = x \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

4 Soit V un espace vectoriel, et $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire symétrique.

(a) Argumenter que

$$W := \{w \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \text{ pour tout } v \in V\}$$

est un sous espace vectoriel, et rappeler la structure vectorielle de l'espace quotient $U := V/W$. Soit $\pi : V \to U$ la projection canonique.

(b) Montrer qu'il existe une application bilinéaire symétrique $(.,.) : U \times U \to \mathbb{R}$, telle que

$$(\pi(X), \pi(Y)) = \langle X, Y\rangle$$

pour tout $X, Y \in V$.

(c) Montrer que si $Z \in U$ avec $(Z, A) = 0$ pour tout $A \in U$, alors $Z = 0$.

5 On pose, pour tout $t \in]-\pi, \pi]$, $f(t) = t(\pi^2 - t^2)$ et on prolonge f sur $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique. Déterminer la série de Fourier de f et en déduire les valeurs des séries numériques $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

6 Soit f 2π - périodique telle que pour $x \in [0, 2\pi[$, $f(x) = \exp(ax)$ où $a \in \mathbb{R}^*$ est un réel non nul fixé.

(a) Calculer la série de Fourier de f.

(b) Exprimer les coefficients de Fourier de la fonction $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ en fonction de ceux de f.

(c) Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sin(nx)}{a^2+n^2}$.

(d) Calculer pour $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}$.

(e) Montrer que

$$\lim_{a\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(f) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.