Exercices d'Analyse de Fourier
Bernd Ammann et Emmanuel Humbert, 2005
Feuille 4 21 mars 2005

1

(a) Déterminez tous les $t \in \mathbb{R}$, tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(2nt)}{n}$ converge.

(b) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos^2(nt)}{n}$ diverge pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(c) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos(nt)|}{n}$ est-elle convergente?

2

Soit f une fonction 2π-périodique, impaire et définie par $f(x) = x(\pi - x)$ pour $x \in [0, \pi]$. Calculer ses coefficients de Fourier. En déduire la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

3

Soient $f_a, f_b, f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions 2π-périodiques qui satisfont

(a) $f_a(x) = x^4$ pour $-\pi \le x < \pi$

(b) $f_b(x) = x^4$ pour $0 \le x < 2\pi$

(c) $f_c(x) = x^3$ pour $-\pi \le x < \pi$

Montrez que f_a, f_b et f_c sont intégrables au sens de Riemann. Calculez les coefficients de Fourier. Montrez que les séries de Fourier convergent (Attention aux points $x = 0$ et $x = \pi$!) simplement vers des fonctions g_a, g_b et g_c que l'on déterminera. La convergence est-elle est uniforme?

4

Soit $f_n : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0 \\ \sqrt[4]{n} & \text{pour } 0 < x \le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{x}} & \text{pour } \frac{1}{n} < x < 2\pi \end{cases}$$

(a) Dessinez le graphe de f_n pour $n = 1, 2, 3$.

(b) Montrez que $f_n \in \mathcal{R}([0, 2\pi[)$ et que $(\langle f_n, f_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.

(c) Montrez que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera. La convergence est-elle uniforme?

(d) Les fonctions f et f^2 sont-elles intégrables au sens de Riemann propre? Les intégrales $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ et $\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx$ existent-elles au sens impropre? Si oui, calculez leur valeur.

(e) Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq l \geq N(\varepsilon)$ on a

$$\langle f_k - f_l, f_k - f_l \rangle < \varepsilon.$$

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* $\Big(\mathcal{R}([0, 2\pi[), \langle ., . \rangle\Big)$.

(f) Montrez qu'il n'y a pas de $g \in \mathcal{R}([0, 2\pi[)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \langle g - f_n, g - f_n \rangle = 0.$$

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy non-convergente.*

5 Soit $\lambda \in]-1, 1[$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\lambda^2 - 2\lambda \cos x + 1}.$$

(a) Vérifiez que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle est de plus continue, paire et 2π-périodique.

(b) Que valent les coefficients de Fourier $(b_n)_n$ de f?

(c) Calculez le coefficient de Fourier a_0 de f (on effectuera le changement de variable $u = \tan(x/2)$).

(d) En utilisant la question précédente, calculez le coefficient de Fourier a_1 de f.

(e) Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$\cos((n + 2)x) + \cos(nx) = 2 \cos((n + 1)x) \cos(x).$$

Déduisez-en une relation de récurrence sur les coefficients de Fourier $(a_n)_n$ de f.

(f) Montrez que pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{2\lambda^n}{1-\lambda^2}$.