Exercices d'Analyse de Fourier
Bernd Ammann et Emmanuel Humbert, 2005
Feuille 3 — 1er mars 2005

---

1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x)f(y). \qquad (*)$$

(a) On suppose que $f(0) = 0$. Que peut-on dire de f?

(b) À partir de maintenant, on suppose que $f(0) \neq 0$. Montrez que f ne s'annule jamais.

(c) Montrez qu'on peut trouver $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tels que $\int_a^b f(t)dt \neq 0$.

(d) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\int_{a+x}^{b+x} f(t)dt}{\int_a^b f(t)dt}.$$

En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(e) Montrez qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$.

2 Soit (γ_n) une suite réelle décroissante telle que $\lim_n \gamma_n = 0$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \gamma_n \sin nx.$$

On suppose que f est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 2\pi]$.

(a) Rappelez brièvement pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $]0, 2\pi[$.

(b) Calculez les coefficients de Fourier (a_n) $(n \geq 0)$ de f.

(c) Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin(kx)}{\sin(x/2)}$ est bornée sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

(d) Montrez que la série

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n \sin nx \sin kx$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

(e) Calculez les coefficients de Fourier (b_n) $(n \geq 1)$ de f.

3 Soit (a_n) une suite réelle. On pose pour tout n,

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(a) On suppose que (a_n) est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$. Montrez que $\lim_n b_n = l$.

(b) On suppose que (b_n) est convergente. Peut-on dire que (a_n) l'est aussi?

4 Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit aussi les fonctions définies par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x) \quad \text{et} \quad f_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x)$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\}$, $\alpha_n(x) = \frac{2x}{x^2-n^2}$.

(a) Montrez que f est définie et continue sur $]0,1[$.

(b) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, montrez que

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}.$$

(c) Montrez que f est périodique de période 1. Quel est le domaine de définition de f?

(d) On rappelle que (voir exercice 3, feuille 2) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}(\pi - x)$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$. En déduire que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

(e) Calculez les valeurs de $f(1/2)$ et $f(1/4)$.

5 Soit V le sous-espace vectoriel (réel) de $\mathcal{R}([0, 2\pi[)$ engendré par C_0, C_1, C_2, S_1 et S_2. On définit

$$V^\perp := \{f \in \mathcal{R}([0, 2\pi[) \mid (f, g) = 0 \text{ pour tout } g \in V\}.$$

(a) Déterminez la dimension de V et de $V^\perp$.

(b) Soit $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \pi - x$. Trouvez des fonctions $f_1 \in V$ et $f_2 \in V^\perp$ tel que

$$f = f_1 + f_2.$$

(c) Les fonctions f_1 et f_2 de la question (b) sont-elles uniques?