**Exercices d'Analyse de Fourier**
**Bernd Ammann et Emmanuel Humbert, 2005**

Feuille 2 — 10. février 2005

---

## 1

Déterminez les coefficients de Fourier et les séries de Fourier des fonctions suivantes

(a) $f : [0, 2\pi[ \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \sin(289x)$

(b) $f : [0, 2\pi[ \to \mathbb{R},\ f(x) = x - \pi$

(c) $f : [0, 2\pi[ \to \mathbb{R},\ f(x) = 1$ pour $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = -1$ pour $x \in [\pi, 2\pi[$.

(d) $f : [0, 2\pi[ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$

## 2

Pour $a \in \mathbb{C}$ on définit $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_a(x) := e^{ax}$. L'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ muni de l'addition standard et de la multiplication scalaire standard est un espace vectoriel complexe, et les $f_a$ sont des vecteurs dans cet espace.
Montrez que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{C}}$ est libre.

## 3

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

(a) Montrez que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $]0, 2\pi[$.

(b) Montrez que $f$ est $2\pi$-périodique et étudiez sa parité.

(c) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in ]0, 2\pi[$. On pose $f_N(x) = \sum_1^N \frac{\sin(nx)}{n}$. En calculant

$$\Re e \left( \int_\pi^x \sum_1^N e^{int} dt \right)$$

de deux manières, montrez que

$$f_N(x) = \int_\pi^x \Re e \left( \frac{e^{it} - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} \right) dt.$$

(d) En utilisant le théorème de Lebesgue, calculez $f(x)$.

(e) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?

## 4

(a) Montrez que pour tout $t \in ]0, 2\pi[$,

$$1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}. \qquad (*)$$

(b) En intégrant cette expression entre $\pi$ et $x$ (où $x \in ]0, 2\pi[$) et en utilisant le théorème de Lebesgue, retrouvez les résultats de l'exercice précédent.

(c) Montrez que

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt-\int_0^{\pi}\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\frac{t}{2}}dt\right)=0.$$

(d) En revenant à l'expression $(*)$, en déduire que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du=\frac{\pi}{2}.$$