Exercices d'Analyse de Fourier
Bernd Ammann et Emmanuel Humbert, 2005
Feuille 1 — 31. Janvier 2005

---

1 Dites si les séries suivantes sont divergentes, convergentes, absolument convergentes ou semi-convergentes:

$$(a)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}\qquad (b)\ \sum_{n\geq 2}\frac{n+2}{n^3-1}\qquad (c)\ \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n)}\qquad (d)\ \sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n^2+1}}{n\ln(n)}$$

$$(e)\ \sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{1}{n^n}\right)\qquad (f)\ \sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{n!}\qquad (g)\ \sum_{n\geq 1}\ln\left(\frac{n^3+5}{n^3+1}\right)\qquad (h)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^{2005}+n}{n^{2005}+1}\right)^{n^{2005}}$$

2 Dites si les suites de fonctions suivantes convergent simplement (resp. uniformément)?

(a) $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $[0,1]$;

(b) $f_n(x) = e^{-nx}$ sur $[1,+\infty[$;

(c) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k^2}$ sur $\mathbb{R}$.

3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique.

(a) Montrez que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

(b) Montrez que f est la dérivée d'une fonction 2π-périodique si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0.$$

4 Soit n, m deux entiers positifs ou nuls. Calculez

$$\int_0^{2\pi}\cos(nx)\sin(mx)\,dx$$

$$\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

$$\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx$$

Faites attention aux cas $n = m$, $n = 0$ et $m = 0$.

5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Que peut-on dire de f?

6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. On note

$$G = \{a \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) = f(x)\}.$$

L'ensemble G est appelé *groupe des périodes de f*.

(a) Montrer que si $a, b \in G$, alors $a + b \in G$.

(b) Montrer que si $a \in G$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $na \in G$.

(c) On suppose qu'il existe une plus petite période $T > 0$ de f, c'est-à-dire qu'il existe $T \in G$, $T > 0$ tel que $\inf G \cap]0, +\infty[= T$. Montrer que $G = T\mathbb{Z}$.