Multilineare Algebra

Handout zur Vorlesung Differentialgeometrie
Dr. Bernd Ammann, Prof. Chr. Bär

Literatur

Frank Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Kapitel 2

1 Tensoren

Motivation. In diesem Handout wollen wir das zentrale Objekt der multilinearen Algebra, die Tensoren, einführen. Der Begriff „Tensor“ stellt die Begriffe „Vektor“, „Linearform“, „lineare Abbildung“, „Bilinearform“, „Multilinearform“ und viele andere in einen einheitlichen Formalismus. Tensoren sind wichtige Objekte sowohl in der Mathematik (Riemannsche Geometrie, Darstellungstheorie, Knotentheorie,...) als auch in der Physik (Allgemeine Relativitätstheorie, klassische Feldtheorie, klassische Mechanik, Quantenphysik, ...). Um den Formalismus einfach zu gestalten, wollen wir uns hier auf Tensoren über endlich-dimensionalen Vektorräumen beschränken.

Im folgenden sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (oder allgemeiner ein Körper der Charakterisitik 0). Weiter seien V, W und U immer endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Der Dualraum von V ist der Vektorraum aller linearen Abbildungen $V \to \mathbb{K}$; wir bezeichnen ihn mit V^*. Die Elemente von V, W und U nennen wir v, w und u, evtl. mit Indizes versehen, die Elemente der Dualräume bezeichnen wir mit α, β,.... Aufgrund der endlichen Dimension können wir V^{**} mit V identifizieren. Dabei wird $v \in V$ mit der Linearform $V^* \to \mathbb{K}$, $\alpha \mapsto \alpha(v)$, identifiziert.

Sei $F(V,W)$ die Menge aller Abbildungen $A : V \times W \to \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass $A^{-1}(\mathbb{K} - \{0\})$ endlich ist. Man beachte, dass die Elemente A von $F(V,W)$ im allgemeinen keine linearen Abbildungen sind. Wir machen $F(V,W)$ zu einem Vektorraum, indem wir für für $f, g \in F(V,W)$ und $a \in \mathbb{K}$ setzen

$$\begin{aligned}(af)(v,w) &:= a(f(v,w)) \\ (f+g)(v,w) &:= f(v,w) + g(v,w)\end{aligned}$$

Der Vektorraum $F(V,W)$ heißt der *freie Vektorraum über $\mathbb{K}$ der von den Punkten von $V \times W$ erzeugt wird.* Wir definieren nun $[v,w] \in F(V,W)$ durch

$$[v,w](v',w') = \begin{cases} 1 & \text{für } v' = v \text{ und } w' = w, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge $\{[v,w] \,|\, v \in V, w \in W\}$ ist eine Basis von $F(V,W)$.

Nun sei $R(V,W)$ der Unterraum von $F(V,W)$ der von allen Elementen der Form

$$\begin{array}{l} [v_1 + v_2, w] - [v_1, w] - [v_2, w] \\ [v, w_1 + w_2] - [v, w_1] - [v, w_2] \\ [av, w] - a[v,w] \\ [v, aw] - a[v,w] \end{array} \tag{1}$$

erzeugt wird.

Definition. Der Quotientenvektorraum $F(V,W)/R(V,W)$ heißt das *Tensorprodukt* von V und W über $\mathbb{K}$ und wird mit $V \otimes W$ bezeichnet. Die Äquivalenzklasse in $V \otimes W$ die von dem Element $[v,w]$ repräsentiert wird, bezeichnen wir mit $v \otimes w$.

Aus (1) erhalten wir die folgenden Relationen in $V \otimes W$:

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ a(v \otimes w) &= (av) \otimes w = v \otimes (aw).\end{aligned}$$

Bemerkung. Nicht jedes Element von $V \otimes W$ lässt sich in der Form $v \otimes w$ schreiben. Die Elemente der Form $v \otimes w$ erzeugen aber $V \otimes W$. Jedes Element von $V \otimes W$ kann deswegen in der Form $\sum v_i \otimes w_i$ geschrieben werden. Kennt man die Werte einer linearen Abbildung $F : V \otimes W \to U$ auf den Elementen der Form $v \otimes w$, berechnet sich daraus für ein beliebiges Element $\sum v_i \otimes w_i \in V \otimes W$

$$F\left(\sum v_i \otimes w_i\right) = \sum F(v_i \otimes w_i).$$

Beispiele.

1.) Sind $\{e_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$ und $\{f_j \,|\, j = 1, \ldots, m\}$ Basen von V und W, dann ist $\{e_i \otimes f_j \,|\, i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m\}$ eine Basis von $V \otimes W$.

2.) Es gilt $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m \cong \mathbb{K}^{nm}$

3.) Es gibt genau einen Vektorraumisomorphismus $V \otimes W \to W \otimes V$, der jedes $v \otimes w$ auf $w \otimes v$ abbildet.

4.) Es gibt genau einen Vektorraumisomorphismus $V \otimes (W \otimes U) \to (V \otimes W) \otimes U$, der jedes $v \otimes (w \otimes u)$ auf $(v \otimes w) \otimes u$ abbildet. Wir schreiben deswegen abkürzend $V \otimes W \otimes U := V \otimes (W \otimes U) = (V \otimes W) \otimes U$.

5.) Der Vektorraum der linearen Abbildungen $V \to W$ kann mit $V^* \otimes W$ identifiziert werden. Dabei entspricht $\alpha \otimes w$ dem Homomorphismus $v \mapsto \alpha(v) \cdot w$

6.) Der Vektorraum der Bilinearformen $V \times W \to \mathbb{K}$ kann mit $V^* \otimes W^*$ identifiziert werden. Man kann deswegen $V \otimes W$ auch als Vektorraum der Bilinearformen $V^* \times W^* \to \mathbb{K}$ interpretieren. Dabei entspricht $\alpha \otimes \beta$ der Biliearform $(v, w) \mapsto \alpha(v) \cdot \beta(w)$.

7.) Betrachten wir $\mathbb{C}$ als reellen zwei-dimensionalen Vektorraum, dann können wir für jeden reellen Vektorraum V das Tensorprodukt mit $\mathbb{C}$ über dem Körper der reellen Zahlen bilden

$$V_{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C}.$$

$V_{\mathbb{C}}$ heißt die *Komplexifizierung* von V. Der zunächst reelle Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$ wird zum komplexen Vektorraum, wenn wir

$$a \cdot (v \otimes z) := v \otimes (az) \qquad \forall a, z \in \mathbb{C}, \quad v \in V$$

definieren.

Definition. Zu jedem Vektorraum V und jedem $r, s \geq 0$ assoziieren wir den *Tensorraum* $\bigotimes_{r,s} V$ *vom Typ* (r, s)

$$\bigotimes\nolimits_{r,s} V := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}.$$

Für den Spezialfall $r = s = 0$ definieren wir $\bigotimes_{0,0} V := \mathbb{K}$. Die Elemente von $\bigotimes_{r,s} V$ heißen *homogene Tensoren vom Typ* (r, s).

Die direkte Summe

$$\bigotimes\nolimits_{*,*} V := \sum_{r,s \geq 0} \bigotimes\nolimits_{r,s} V$$

nennen wir die *Tensoralgebra von* V. Elemente von $\bigotimes_{*,*} V$ heißen *Tensoren.* Wir definieren eine Multiplikation auf $\bigotimes_{*,*} V$ wie folgt: zu $u = u_1 \otimes \ldots \otimes u_r \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_s \in \bigotimes_{r,s} V$ und $v = v_1 \otimes \ldots \otimes v_{r'} \otimes \beta_1 \otimes \ldots \otimes \beta_{s'} \in \bigotimes_{r',s'} V$ definieren wir ihr Produkt $u \otimes v \in \bigotimes_{r+r',s+s'} V$ als

$$u \otimes v := u_1 \otimes \ldots \otimes u_r \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_{r'} \otimes \alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_s \otimes \beta_1 \otimes \ldots \otimes \beta_{s'}.$$

Diese Definition lässt sich auf eindeutige Art und Weise zu einer bilinearen Abbildung

$$\otimes : \bigotimes_{*,*} V \times \bigotimes_{*,*} V \to \bigotimes_{*,*} V$$

fortsetzen.

$\bigotimes_{*,*} V$ ist zusammen mit der Multiplikation $\otimes$ eine nicht-kommutative, assoziative und graduierte Algebra. „Graduiert“ bedeutet hierbei, dass

$$\bigotimes_{r,s} V \otimes \bigotimes_{r',s'} V \subset \bigotimes_{r+r',s+s'} V.$$

Interpretation. Einen homogenen Tensor vom Grad (r, s), etwa $u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s$, kann man interpretieren als

1.) multilineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{-mal}} & \to & \bigotimes_{r,0} V, \\ (v_1, \ldots, v_s) & \mapsto & \alpha_1(v_1) \cdots \alpha_s(v_s) \cdot u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \end{array}$$

2.) multilineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{-mal}} & \to & \bigotimes_{0,s} V, \\ (\beta_1, \ldots, \beta_r) & \mapsto & \beta_1(u_1) \cdots \beta_r(u_r) \cdot \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \end{array}$$

3.) lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \bigotimes_{s,0} V & \to & \bigotimes_{r,0} V \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_s & \mapsto & \alpha_1(v_1) \cdots \alpha_s(v_s) \cdot u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \end{array}$$

4.) lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \bigotimes_{0,r} V & \to & \bigotimes_{0,s} V \\ \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_r & \mapsto & \beta_1(u_1) \cdots \beta_r(u_r) \cdot \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \end{array}$$

5.) Linearform auf $\bigotimes_{s,r} V$,

$$\begin{array}{rcl} \bigotimes_{s,r} V & \to & \mathbb{K} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \otimes \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_r & \mapsto & \alpha_1(v_1) \cdots \alpha_s(v_s) \cdot \beta_1(u_1) \cdots \beta_r(u_r) \end{array}$$

Also können wir $\bigotimes_{r,s} V$ mit $\left(\bigotimes_{s,r} V\right)^*$ identifizieren.

Beispiele.

1.) Vektoren sind Tensoren vom Grad $(1, 0)$, Linearformen sind Tensoren vom Grad $(0, 1)$.

2.) Eine lineare Abbildung ist ein Tensor vom Grad $(1, 1)$.

3.) Ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum V ist ein Tensor vom Grad $(0, 2)$.

4.) Ein hermitesches Skalarprodukt auf dem **komplexen** Vektorraum V ist **kein** Tensor über dem Körper $\mathbb{C}$, da das Skalarprodukt in einer Komponente antilinear ist.

5.) Eine Determinantenfunktion auf einem s-dimensionalen Vektorraum V ist eine alternierende, multilineare Abbildung

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{-mal}} \to \mathbb{K},$$

also ein Tensor vom Grad $(0, k)$.

2 Alternierende Tensoren

Dieses Kapitel wird sich mit einer speziellen Klasse von Tensoren beschäftigen, den alternierenden Tensoren.

Wir definieren zunächst den Alternierungs-Operator

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}_r : \bigotimes\nolimits_{r,0} V &\to \bigotimes\nolimits_{r,0} V \\ v_1 \otimes \ldots \otimes v_r &\mapsto \sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)}, \end{aligned}$$

wobei die Summation über alle Permutationen σ von $\{1, \ldots, r\}$ geht. Die Abbildung Alt_r ist bis auf eine Konstante $r!$ eine Projektion, d. h. sie erfüllt

$$\frac{1}{r!}\mathrm{Alt}_r = \left(\frac{1}{r!}\mathrm{Alt}_r\right) \circ \left(\frac{1}{r!}\mathrm{Alt}_r\right).$$

Definition. Das Bild von Alt_r bezeichnen wir mit $\bigwedge_r V$.

Für einen homogenen Tensor $\omega \in \bigotimes_{r,0} V$ sind äquivalent:

1.) $\omega \in \bigwedge_r V$,

2.) $\mathrm{Alt}(\omega) = r! \cdot \omega$,

3.) $\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0$ falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V^*$ linear abhängig sind,

4.) $\omega(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(r)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ für alle Permutationen σ und alle Linearformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V^*$.

Hieraus folgt unter anderem $\bigwedge_r V = 0$ für $r > \dim V$. Wir bilden nun die Summe

$$\bigwedge\nolimits_* V := \bigoplus_{r \geq 0} \bigwedge\nolimits_r V.$$

Definition. Das Dach-Produkt

$$\begin{aligned} \wedge : \bigwedge\nolimits_* V \times \bigwedge\nolimits_* V &\to \bigwedge\nolimits_* V \\ (\nu, \omega) &\mapsto \nu \wedge \omega \end{aligned}$$

ist die eindeutig bestimmte bilineare Abbildung, die $\bigwedge_r V \times \bigwedge_s V$ in $\bigwedge_{r+s} V$ abbildet und für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \bigotimes_{r,0} V \times \bigotimes_{s,0} V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\mathrm{Alt}_r \times \mathrm{Alt}_s"'] & \bigotimes_{r+s,0} V \arrow[d, "\mathrm{Alt}_{r+s}"] \\ \bigwedge_r V \times \bigwedge_s V \arrow[r, "\wedge"] & \bigwedge_{r+s} V \end{tikzcd} \tag{2}$$

für alle r und s kommutiert.

Damit dieses Dach-Produkt wohldefiniert ist, muss man sich natürlich noch überlegen, dass solch eine Abbildung überhaupt existiert und durch die obige Forderung eindeutig bestimmt ist.

Eigenschaften.

1.) Das Dachprodukt ist assoziativ, also $\tau \wedge (\nu \wedge \omega) = (\tau \wedge \nu) \wedge \omega$.

2.) Für $\tau \in \bigwedge_r V$ und $\omega \in \bigwedge_s V$ gilt $\tau \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \tau$

$\bigwedge_* V$ bildet also mit der Multiplikation $\wedge$ eine graduierte nicht-kommutative, assoziative Algebra, die sogenannte *äußere Algebra* oder *Grassmann-Algebra* von V.

Bemerkung. Genauso wie wir zu dem Vektorraum V die äußere Algebra $\bigwedge_* V$ bilden können, können wir zum Dualraum V^* die äußere Algebra $\bigwedge_* V^*$ bilden. Die Algebra $\bigwedge_* V^*$ wird in der Differentialgeometrie häufig gebraucht. Die Elemente heißen *Formen*, die Elemente von $\bigwedge_r V^*$ heißen *(alternierende) r-Formen* oder *Formen vom Grad r*. Mit der obigen Interpretation ist eine r-Form eine alternierende, multilineare Abbildung

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{K}$$

Beispiele.

1.) Konstanten sind 0-Formen, Linearformen sind 1-Formen

2.) Determinantenfunktionen auf einem s-dimensionalen Vektorraum sind s-Formen

3.) Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ Linearformen auf V und $v_1, \ldots, v_r$ Vektoren in V, dann berechnet sich

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r(v_1, \ldots, v_r) = \det \Big(\alpha_i(v_j) \Big)_{i,j \in \{1,\ldots,r\}} \tag{3}$$

Vorsicht. Es gibt in der Literatur teilweise verschiedene Konventionen. In manchen Büchern wird im Diagramm (2) die Abbildung $(1/r!)\mathrm{Alt}_r$ anstelle von Alt_r verwendet. Aus dieser unterschiedlichen Konvention ergeben sich eine Reihe von anderen Vorfaktoren. Unter anderem würde dann die Formel (3) durch

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r(v_1, \ldots, v_r) = \frac{1}{r!} \det \Big(\alpha_i(v_j) \Big)_{i,j \in \{1,\ldots,r\}}$$

ersetzt werden müssen.

Auch die Definition von $\bigwedge_* V$ im oben zitierten Buch von Warner weicht etwas von unseren Definitionen ab, dieser Unterschied ist aber nur formaler Natur und hat unter anderem keinen Einfluss auf Formel (3).