Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004
Blatt 12 12. Juli 2004

---

1 Sei $\varphi : U \to V$ eine Karte einer Hyperfläche M in $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $\varphi^{-1} = (F^1, \ldots, F^n)$, $F_i \in C^\infty(V)$. Berechnen Sie die zweite Fundamentalform von M in $\mathbb{R}^n$ in Termen der F_i und deren Ableitungen.

2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine glatte positive Funktion. Die *Rotationsfläche*

$$M := \{(x, (\sin\alpha) f(x), (\cos\alpha) f(x)) \mid x, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

trage die von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierte Metrik. Berechnen Sie die Weingarten-Abbildung, die zweite Fundamentalform und die Schnittkrümmung von M.

3 Sei $\bar{M}$ eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und M eine abgeschlossene semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) die zweite Fundamentalform von M in $\bar{M}$ verschwindet

(b) jede Geodätische $\gamma : (a, b) \to \bar{M}$ mit $\dot{\gamma}(\frac{a-b}{2}) \in TM$ verläuft vollständig in M.

4 Sei $(\bar{M}, \bar{g})$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit, $p \in \bar{M}$, und sei V ein Untervektorraum von T_pM. Man wähle eine offene Umgebung U von 0 in T_pM so klein, dass $\exp_p$ ein Diffeomorphismus von U auf $\exp_p(U)$ ist. Man zeige, dass $\exp_p(U \cap V)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\bar{M}$ ist, und man berechne die zweite Fundamentalform im Punkt p.

Abgabe: Freitag, 16.7.2004 im Postfach von Herrn Wotzke
Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`