Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004

Blatt 11 — 1. Juli 2004

---

1 Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(M)$, $X \in \Gamma(TM)$. Zeigen Sie

(a) $\operatorname{div}(fX) = \partial_X f + f \operatorname{div} X$

(b) $\operatorname{div}(X^b \otimes X^b) = (\operatorname{div} X)X^b + (\nabla_X X)^b$

2 Sei $S^{n,m}$ definiert wie auf dem letzten Blatt. Geben Sie ein Einheitsnormalenfeld ν an. Berechnen Sie die zweite Fundamentalform $\mathbb{I}$ und die Weingarten-Abbildung bezüglich des obigen Einheitsnormalenfelds.

3 Sei (M, g) eine zusammenhängende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Es gebe eine glatte Funktion, so dass $\operatorname{ric} = fg$. Zeigen Sie, dass f konstant ist. *Tipp: Nutzen Sie* $2 \operatorname{div} \operatorname{ric} = d \operatorname{scal}$.

4 Beweisen Sie Lemma 12.3. Also: Sei (U, ε, p) eine ideale Flüssigkeit auf einer $(3+1)$-dimensionalen Lorentzmannigfaltigkeit, und sei

$$T = (\varepsilon + p)U^b \otimes U^b + pg$$

der zugehörige Energie-Impuls-Tensor. Dann sind äquivalent

(i) $\operatorname{div} T = 0$

(ii)
$$\partial_u \varepsilon = -(\varepsilon + p) \operatorname{div} U$$
und
$$g((\varepsilon + p)\nabla_U U, X) = -\partial_X p$$
für alle X, die auf U senkrecht stehen.

Abgabe: Donnerstag, 8.7.2004 im Postfach von Herrn Wotzke
Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`