Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004

Blatt 10 24. Juni 2004

---

1 Bestimmen Sie die nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen der oberen Halbebene $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit der hyperbolischen Metrik $g_{\mathrm{hyp}} = y^{-2} g_{\mathrm{eucl}}$.
Tipp: Man schreibe $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ und unterscheide die Fälle $\dot{x}(t) = 0$ und $\dot{x}(t) \neq 0$, und verwende die Subsitution $y = 1/u$.
Berechnen Sie die Schnittkrümmung von (H, g_{hyp}).

2 Sei $S^{n,m} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1,m} \mid g^{n+1,m}(x, x) = 1\}$, die sogenannte *semi-Riemannsche Sphäre*. Zeigen Sie, dass $S^{n,m}$ eine semi-riemannsche Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}^{n+1,m}, g^{n+1,m})$ ist. Die induzierte Metrik nennen wir g. Berechnen Sie den Riemannschen Krümmungstensor, die Schnittkrümmung für alle Ebenen $E \in G_2(S^{n,m}, g)$, die Ricci- und Skalarkrümmung.
Tipp: Berechnen Sie diese Krümmungen mit Hilfe einer Karte in einem einzigen Punkt, und nutzen Sie dann ein Symmetrie-Argument.

3 Seien (M_1, g_1) und (M_2, g_2) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Man versehe $M_1 \times M_2$ mit der Produkt-Mannigfaltigkeitsstruktur. Sei $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ die Projektion auf M_i. Für $(p, q) \in M_1 \times M_2$ ist

$$T_{(p,q)} M_1 \times M_2 \to T_p M_1 \oplus T_q M_2, \qquad V \mapsto (d\pi_1(V), d\pi_2(V))$$

ein Isomorphismus, vermöge dessen wir $T_{(p,q)} M_1 \times M_2$ mit $T_p M_1 \oplus T_q M_2$ identifizieren. Seien nun $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2) \in T_{(p,q)} M_1 \times M_2$, wobei $X_1, Y_1 \in T_p M_1$ und $X_2, Y_2 \in T_q M_2$, dann wird durch

$$g\Big((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)\Big) := g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)$$

eine semi-Riemannsche Metrik auf $M_1 \times M_2$ definiert.

(a) Berechnen Sie den Riemannschen Krümmungstensor, die Ricci-Krümmung und die Skalarkrümmung von $(M_1 \times M_2, g)$ in Termen der Krümmungsgrößen von (M_1, g_1) und (M_2, g_2).

(b) Zeigen Sie: Falls die Schnittkrümmung überall auf M_1 und M_2 nicht-negativ ist, so ist auch die Schnittkrümmung von (M, g) überall nicht-negativ.

(c) Gilt die Aussage in (b) auch, wenn wir „nicht-negativ“ durch „nicht-positiv“, „(strikt) positiv“ oder „(strikt) negativ“ ersetzen? Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiele.

4 (Satz von Schur) Sei M eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\dim M \geq 3$. Es gebe eine C^∞-Funktion $k\colon M \to \mathbb{R}$, so daß

$$K(E) = k(p)$$

für alle $p \in M$ und alle nicht-ausgearteten Ebenen $E \subset T_pM$. Zeigen Sie, dass dann k lokal konstant ist.
Tipp: Nutzen Sie zunächst Folgerung 9.14, um

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V := \nabla_X(R(Y,Z)V) - R(\nabla_X Y, Z)V - R(Y, \nabla_X Z)V - R(Y,Z)\nabla_X V$$

zu berechnen. Nutzen Sie dann die 2. Bianchi-Identität

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0 \qquad \forall X,Y,Z,V \in T_pM.$$

Wir werden diese Identität am Dienstag 29.6. zeigen. Nehmen Sie dann paarweise orthogonale X,Y,Z und setzen Sie $V = Z$ und $W = Y$.

Abgabe: Donnerstag, 1.7.2004 im Postfach von Herrn Wotzke
Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`