Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004
Blatt 9 — 17. Juni 2004

---

1 Sei M eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine Geodätische.

(a) Zeigen Sie: Ist $c(0) = c(L)$ und $\dot{c}(0) = \dot{c}(L)$, so ist c periodisch, $c(t) = c(t + L)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie ein Beispiel mit $c(0) = c(L)$ und $\dot{c}(0) \neq \dot{c}(L)$.

2 Sei $(M, g) = (\mathbb{R}P^n, g_{\mathrm{kan}})$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathcal{D}$ der Exponentialabbildung.

(b) Bestimmen Sie für $p \in \mathbb{R}P^n$ den maximalen Radius $r > 0$, s. d. für den offenen r-Ball $B_r(0) \subset T_pM$ mit Mittelpunkt 0 die Exponentialabbildung auf $B_r(0)$ injektiv ist.

3 Sei $\varphi : U \to V$ eine Karte einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit. Wie in der Vorlesung definieren wir R^l_{kij} durch

$$\sum_l R^l_{kij} \frac{\partial}{\partial \varphi^l} = R\Big(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big) \frac{\partial}{\partial \varphi^k}.$$

Zeigen Sie

$$R^l_{kij} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial \varphi^j} + \sum_{r=1}^{\dim M} \left(\Gamma^r_{kj} \Gamma^l_{ri} - \Gamma^r_{ki} \Gamma^l_{rj} \right)$$

4 Der Krümmungstensor wird in lokalen Koordinaten durch die n^4 Komponenten

$$R_{klij} = g\left(R\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}, \frac{\partial}{\partial\varphi^j}\Big)\frac{\partial}{\partial\varphi^k}, \frac{\partial}{\partial\varphi^l}\right)$$

festgelegt.

(a) Zeigen Sie, dass die Symmetrien aus Satz 9.5 (1), (2) und (4) die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf $\frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}$ reduzieren. Genauer: Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum mit nicht-ausgearteter Bilinearform $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, dann bildet die Menge aller multilinearen Abbildungen $R\colon V \times V \times V \to V$, die den Symmetrien aus Satz 9.5 (1), (2), und (4) genügen, einen $\frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}$-dimensionalen Vektorraum.

(b) Zeigen Sie, dass die Symmetrien aus Satz 9.5 (1), (2), (3) und (4) die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ reduzieren.

Abgabe: Donnerstag, 24.6.2004 im Postfach von Herrn Wotzke
Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`