Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004

Blatt 8 | 9. Juni 2004

1 Sei $V := (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ und $\psi : V \to S^2$,

$$\psi(\alpha, \rho) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\rho) \\ \cos(\alpha)\cos(\rho) \\ \sin(\rho) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass ψ injektiv ist, bestimmen Sie die Menge $U := \psi(V)$, und zeigen Sie, dass $\psi^{-1} : U \to V$ eine Karte von S^2 ist. Skizzieren Sie die Koordinaten-Vektorfelder und berechenen Sie die Christoffelsymbole bezüglich der Standardmetrik auf S^2 für diese Karte.

2 *Transformationsformel für Christoffelsymbole.* Sei M eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, seien $\varphi\colon U \to V$, $\psi\colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ zwei Karten von M, seien g_{ij} bzw. $\tilde{g}_{ij}$ die Koordinatendarstellungen der semi-Riemannschen Metrik und Γ_{ij}^k bzw. $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs bezüglich dieser Karten.
Zeigen Sie:

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k\, g_{kv} = \sum_{t,s} \frac{\partial \psi^t}{\partial \varphi^v} \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial \varphi^j\, \partial \varphi^i}\, \tilde{g}_{st} + \sum_{r,s,t,w} \frac{\partial \psi^r}{\partial \varphi^i} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \psi^w}{\partial \varphi^v}\, \widetilde{\Gamma}^t_{rs}\, \tilde{g}_{tw}$$

3 Sei $c : [a, b] \to M$ eine Kurve in einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g).

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem $\xi \in T_{c(a)}M$ genau ein Vektorfeld Z_ξ längs c gibt, so dass $Z_\xi(a) = \xi$ und $\nabla_{\dot{c}(t)} Z_\xi = 0$ für alle $t \in [a, b]$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P_c : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M$, $\xi \mapsto Z_\xi(b)$ eine Isometrie ist. *Bemerkung: Diese Abbildung heißt Paralleltransport von $T_{c(a)}M$ nach $T_{c(b)}M$ längs c.*

(c) Sei $I : M \to M$ eine Isometrie, und c verlaufe in der Fixpunktmenge von I. Zeigen Sie, dass dann $P_c \circ I = I \circ P_c$. Berechnen Sie hiermit den Paralleltransport entlang von Großkreisen in S^n.

(d) Zeigen Sie an Hand eines Beispiels, dass der Paralleltransport von T_pM nach T_qM von der Wahl der Kurve c abhängt, und nicht nur von den Endpunkten. *(Tipp: Nutzen Sie Aufgabe (c).)*

4 Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es für jedes $X \in TM$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte Geodätische $\gamma : \mathbb{R} \to M$ gibt mit $\dot{\gamma}(0) = X$. (*Tipp: Nutzen Sie, dass die Menge aller Vektoren in TM der Länge* 1 *in einer geeigneten Topologie eine kompakte Menge ist.*)

Abgabe: Donnerstag, 17.6.2004 im Postfach von Herrn Wotzke
Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`