**Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“**
**Bernd Ammann, SS 2004**
Blatt 8 9. Juni 2004

---

**1** Sei $V := (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ und $\psi : V \to S^2$,

$$\psi(\alpha, \rho) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\rho) \\ \cos(\alpha)\cos(\rho) \\ \sin(\rho) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\psi$ injektiv ist, bestimmen Sie die Menge $U := \psi(V)$, und zeigen Sie, dass $\psi^{-1} : U \to V$ eine Karte von $S^2$ ist. Skizzieren Sie die Koordinaten-Vektorfelder und berechenen Sie die Christoffelsymbole bezüglich der Standardmetrik auf $S^2$ für diese Karte.

**2** *Transformationsformel für Christoffelsymbole.* Sei $M$ eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, seien $\varphi \colon U \to V$, $\psi \colon \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ zwei Karten von $M$, seien $g_{ij}$ bzw. $\tilde{g}_{ij}$ die Koordinatendarstellungen der semi-Riemannschen Metrik und $\Gamma_{ij}^k$ bzw. $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs bezüglich dieser Karten.
Zeigen Sie:

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k \, g_{kv} = \sum_{t,s} \frac{\partial \psi^t}{\partial \varphi^v} \frac{\partial^2 \psi^s}{\partial \varphi^j \, \partial \varphi^i} \, \tilde{g}_{st} + \sum_{r,s,t,w} \frac{\partial \psi^r}{\partial \varphi^i} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \psi^w}{\partial \varphi^v} \, \widetilde{\Gamma}_{rs}^t \, \tilde{g}_{tw}$$

**3** Sei $c : [a, b] \to M$ eine Kurve in einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, g)$.

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem $\xi \in T_{c(a)}M$ genau ein Vektorfeld $Z_\xi$ längs $c$ gibt, so dass $Z_\xi(a) = \xi$ und $\nabla_{\dot{c}(t)} Z_\xi = 0$ für alle $t \in [a, b]$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P_c : T_{c(a)}M \to T_{c(b)}M$, $\xi \mapsto Z_\xi(b)$ eine Isometrie ist. *Bemerkung: Diese Abbildung heißt Paralleltransport von $T_{c(a)}M$ nach $T_{c(b)}M$ längs $c$.*

(c) Sei $I : M \to M$ eine Isometrie, und $c$ verlaufe in der Fixpunktmenge von $I$. Zeigen Sie, dass dann $P_c \circ I = I \circ P_c$. Berechnen Sie hiermit den Paralleltransport entlang von Großkreisen in $S^n$.

(d) Zeigen Sie an Hand eines Beispiels, dass der Paralleltransport von $T_pM$ nach $T_qM$ von der Wahl der Kurve $c$ abhängt, und nicht nur von den Endpunkten. *(Tipp: Nutzen Sie Aufgabe (c).)*

**4** Sei $(M, g)$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es für jedes $X \in TM$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte Geodätische $\gamma : \mathbb{R} \to M$ gibt mit $\dot{\gamma}(0) = X$. (*Tipp: Nutzen Sie, dass die Menge aller Vektoren in $TM$ der Länge 1 in einer geeigneten Topologie eine kompakte Menge ist.*)

Abgabe: Donnerstag, 17.6.2004 im Postfach von Herrn Wotzke
Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`