Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004
Blatt 7 27. Mai 2004

---

1 Sei $e_1, .., e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$.

(a) Sei $n \geq 4$. Gibt es Vektoren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$, so dass $e_1 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_4 = a_1 \otimes a_2$?

(b) Sei $n \geq 3$. Für welche Matritzen $(b_{ij})_{ij}$ gibt es Vektoren $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} e_i \otimes e_j = a_1 \otimes a_2 + a_3 \otimes a_4$$

2 Sei (M, g) eine semi-riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von T_pM für $p \in M$ heißt *Orthonormalbasis,* falls $g_p(e_i, e_j) = 0$ für $i \neq j$ und $g_p(e_i, e_i) = \varepsilon_i = \pm 1$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau ein C^∞-Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ auf M, so daß für alle C^∞-Vektorfelder X gilt:

$$g(\operatorname{grad} f, X) = \partial_X f \ .$$

$\operatorname{grad} f$ heißt *Gradientenvektorfeld* von f.

(b) Für eine Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ von T_pM gilt:

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \partial_{e_i} f \cdot e_i \ .$$

(c) In lokalen Koordinaten gilt:

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \ ,$$

dabei ist $g_{ij}(p) := g(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}|_p)$ und $\big(g^{ij}(p)\big)_{i,j}$ die zu $\big(g_{ij}(p)\big)_{i,j}$ inverse Matrix.

3 Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch die Identität gegebene Karte von $\mathbb{R}^2$. Wir definieren

$$g = \cos \varphi^1 \, (d\varphi^1 \otimes d\varphi^1 - d\varphi^2 \otimes d\varphi^2) + \sin \varphi^1 \, (d\varphi^1 \otimes d\varphi^2 + d\varphi^2 \otimes d\varphi^1).$$

Zeigen Sie, dass g eine Lorentzmetrik auf $\mathbb{R}^2$ ist. Skizzieren Sie die Zeitkegel wie in Beispiel 7.5 (Schwarzschildhalbebene) der Vorlesung. Besitzt $(\mathbb{R}^2, g)$ eine Zeitorientierung? Zeigen Sie, dass die obige Definition von g auch eine Metrik auf $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ definiert. Besitzt $((\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}, g)$ eine Zeitorientierung? Gibt es eine Zeitorientierung auf $((\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}, g)$?

4 Sei M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit der induzierten Metrik, und M sei abgeschlossen.

(a) Zeigen Sie, dass man jedes Vektorfeld X auf M zu einem Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen kann, d.h. es gibt ein (glattes) Vektorfeld $\tilde{X}$ auf $\mathbb{R}^n$, so dass für jedes $p \in M$ gilt

$$\tilde{X}|_p = X|_p,$$

wobei wir wie bisher T_pM vermöge der Abbildung $\rho_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ einbetten.

(b) Die Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^n$ auf T_pM bezeichnen wir mit $P : \mathbb{R}^n \to T_pM$. Sei nun Y ein weiteres Vektorfeld auf M mit Fortsetzung $\tilde{Y}$. Zeigen Sie für $p \in M$

$$P\Big[(\partial_{\tilde{Y}}\tilde{X})|_p\Big] = (\nabla_Y X)|_p,$$

wobei $\nabla_Y X$ der Levi-Civita-Zusammenhang auf M ist.

(c) Gilt Aussage (a) auch noch, wenn M nicht abgeschlossen ist? Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an. Formulieren Sie eine zu (b) analoge Aussage für nicht-abgeschlossene M.

Abgabe: Freitag, 11.6.2004 im Postfach von Herrn Wotzke
Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`