Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004
Blatt 6 20. Mai 2004

1

Ein Raumschiff reist in $\mathbb{R}^{3,1}$. Es beginnt zunächst im Punkt $(0, 0, 0, 0)$, fliegt dann frei fallend (=geradlinig) zum Ereignis $(1, 0, 0, 2)$, dreht dort abrupt um und fliegt frei fallend zum Ereignis $(0, 0, 0, 5)$. Um wieviele Zeiteinheiten ist der Pilot während der Reise gealtert?

2

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^{n,1}$ eine nach Eigenzeit parametrisierte überall zeitartige Kurve. Zeigen Sie:

(a) $g(\dot\gamma(r), \ddot\gamma(r)) = 0$ für alle $r \in I$. (*Bemerkung:* $a(r) := \ddot\gamma(r)$ heißt die *Beschleunigung* der Weltlinie.)

(b) $\ddot\gamma(r)$ ist immer raumartig oder Null.

(c) Ist $n = 1$ und $g(a(r), a(r)) = const > 0$, dann bewegt sich γ auf einer Hyperbel.

3

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie

(a) Gibt es ein nirgendwo verschwindendes Vektorfeld X auf M, dann gibt es eine Lorentzmetrik g auf M, so dass X bezüglich g zeitartig ist. *(Bemerkung: Versieht man jeden (T_pM, g_p) mit der Zeitorientierung, so dass X zukunftsgerichtet, dann sehen wir also, dass diese Zeitorientierung „stetig“ von p abhängt. Solch eine stetige Wahl einer Zeitorientierung nennt man auch Zeitorientierung von (M, g).)*

(b) Ist umgekehrt g eine Lorentzmetrik auf M und ist eine Zeitorientierung gewählt, so gibt es ein nicht verschwindendes zeitartiges zukunftsgerichtetes Vektorfeld X auf M.

4

(a) Konstruieren Sie eine Lorentzmetrik auf S^{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$. *Tipp: Denken Sie an die vorige Aufgabe und Blatt 5, Aufgabe 2.*

(b) Gibt es Lorentzmetriken auf S^{2k} für $k \in \mathbb{N}$? *Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass jede Lorentzmetrik auf S^n notwendigerweise zeitorientiert sein muss. Nutzen Sie dann die Tatsache, dass es auf S^{2k} kein nirgends verschwindendes Vektorfeld gibt (Ein Beweis dieser Tatsache wäre schön, ist aber nicht erforderlich, sondern eine freiwillige Zusatzaufgabe.)*

Abgabe: Freitag, 28.5.2004 im Postfach von Herrn Wotzke
Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`