Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004
Blatt 5 13. Mai 2004

1

Sei M eine differenzierbare 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\varphi : M \to V \subset \mathbb{R}^2$ eine auf ganz M gegebene Karte. Skizzieren sie die Vektorfelder $\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi_2}$, und $-\varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_2}$. Berechnen Sie die folgenden Lie-Klammern

(a) $[\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial}{\partial \varphi_2}]$

(b) $[\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, -\varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_2}]$

(c) $[\varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_2}]$

2

Sei $M = S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Zu $p \in S^{2n+1}$ setze

$$c_p(t) = e^{it} \cdot p\,.$$

Zeigen Sie, daß $X(p) := [c_p]$ ein nirgends verschwindendes C^∞-Vektorfeld auf M ist.

3

(a) Sei $Z := \{X \in \mathbb{R}^{n,m} \mid g(X,X) < 0\}$ die Menge der zeitartigen Vektoren in $\mathbb{R}^{n,m}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{R}^n \times S^{m-1} \times \mathbb{R}^+ \to Z, \qquad (x,y,t) \mapsto (x, \sqrt{|x|^2 + t}\; y)$$

ein Diffeomorphismus ist. Wievele Zusammenhangskomponenten hat also Z?

(b) Ist $V \in \mathbb{R}^{n,1}$ raumartig, dann gibt es zukunftsgerichtete (zeitartige) Vektoren X_+, X_- und X_0, so dass $g(Y, X_+) > 0$, $g(Y, X_-) < 0$ und $g(Y, X_0) = 0$.

4 Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $M := \{x \in \mathbb{R}^{n,m} \mid g(x,x) = a\}$ eine Untermanngifaltigkeit von V ist. Sei $i : M \to \mathbb{R}^{n,m}$ die Inklusion, $p \in M$, $\rho_p := di|_p : T_pM \to \mathbb{R}^{n,m}$.

(a) Zeigen Sie: Sind X, Y glatte Vektorfelder auf M, so ist $p \mapsto (\rho_p^* g)(X_p, Y_p)$ eine glatte Funktion auf M,

(b) $\rho_p^* g$ ist eine **nicht-entartete** symmetrische Bilinearform auf T_pM,

(c) Bestimmen Sie den Index von $\rho_p^* g$.

(d) Sei nun $m = 1$, $a = -1$. Gegeben seien $p, q \in M$, $X \in T_pM$ und $Y \in T_qM$ mit $g(di|_p X, di|_p X) = g(di|_q Y, di|_q Y)$. Zeigen Sie, dass es eine Vektorraum-Isometrie $A : \mathbb{R}^{n,1} \to \mathbb{R}^{n,1}$ gibt mit $A(p) = q$ und $dA|_p(X) = Y$ gibt.

Abgabe: Freitag, 21.5.2004 im Postfach von Herrn Wotzke
Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`