Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004

Blatt 4 | 6. Mai 2004

---

1 Wir schreiben für die Äquivalenzklasse $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ kurz $[x_0, \ldots, x_n]$. Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen wohldefiniert und glatt sind:

(a) *Veronese-Abbildung*: $\varphi : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^5$, $\varphi\big([x_0, x_1, x_2]\big) = [x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2]$.

(b) *Segre-Abbildung*: $\psi : \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^8$,

$$\psi\big([x_0, x_1, x_2], [y_0, y_1, y_2]\big) = [x_0y_0, x_0y_1, \ldots, x_iy_j, \ldots, x_2y_2].$$

2 Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N. Vektorfelder $X^M \in \Gamma(M)$ und $X^N \in \Gamma(N)$ heißen *f-verwandt*, falls

$$df(X_p^M) = X_{f(p)}^N.$$

Seien nun $X^M, Y^M \in \Gamma(M)$ und $X^N, Y^N \in \Gamma(N)$. Zeigen Sie, dass wenn sowohl X^M und X^N als auch Y^M und Y^N f-verwandt sind, dann sind $[X^M, Y^M]$ und $[X^N, Y^N]$ ebenfalls f-verwandt.

3 Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, sei $p \in M$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein offenes Intervall $(a, b) \ni 0$ und eine glatte Kurve $c : I \to M$ gibt, so dass

$$X_{c(t)} = \dot{c}(t) \qquad \forall t \in (a, b)$$

und $c(0) = p$. *Tipp: Übersetzen Sie die Bedingung in eine Karte und wenden Sie den Satz von Picard-Lindelöf an.*

(b) Sei M kompakt. Zeigen Sie, dass man dann $(a, b) = \mathbb{R}$ wählen kann.

(c) Gilt (b) auch, falls M nicht kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis bzw. durch ein Gegenbeispiel.

Definition für Aufgabe 4: Die Kurve c aus Aufgabe 3 heißt *Intergalkurve von X*.

4 Sei G eine Gruppe und gleichzeitig eine Mannigfaltigkeit, so dass Multiplikation $G \times G \to G, (g,h) \mapsto g \cdot h$ und Inversen-Abbildung $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ differenzierbare Abbildungen sind. Für $g \in G$ seien $l_g : G \to G$ und $r_g : G \to G$ die Links- und die Rechts-Multiplikation mit g, d.h. $l_g(h) = g \cdot h$ und $r_g(h) = h \cdot g$. Wir nennen G eine *Lie-Gruppe*. Ein Vektorfeld auf G heißt linksinvariant, falls

$$dl_g(X) = X$$

für alle $g \in G$.

Zeigen Sie:

(1) Linksinvariante Vektorfelder sind glatt, und zu jedem $x \in T_eG$ gibt es genau ein linksinvariantes Vektorfeld X auf G mit $X(e) = x$.

(2) Sei X ein linksinvariantes Vektorfeld. Dann gibt es zu jedem $p \in G$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte Integralkurven c von X mit $c(0) = p$.

(3) Von nun an identifizieren wir $T_e\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ mit den linksinvarianten Vektorfeldern. Die Lie-Klammer von den linksinvarianten Vektorfeldern $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ definiert also eine bilineare Abbildung $T_e\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times T_e\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to T_e\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Auf der Menge der reellen quadratischen $n \times n-$Matrizen $\mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{R})$ definieren wir die Lie-Klammer $[A,B]_M := AB - BA$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{R})$. Konstruieren Sie einen Vektorraumisomorphismus $I : \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{R}) \to T_e\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, so dass

$$[I(A), I(B)] = I([A,B]_M).$$

(4) Was ändert sich, wenn überall linksinvariante Vektorfelder durch rechtsinvariante Vektorfelder ersetzt werden?

Abgabe: Donnerstag, 13.5.2004 vor der Vorlesung

Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.

`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`