Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004
Blatt 3 29. April 2004

1

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Für zwei Vektoren $x, y \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ definieren wir: x und y heißen äquivalent, falls es ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ gibt mit $x = \lambda y$. Die Äquivalenzklasse von x bezeichnen wir mit $[x]$. Der *projektive Raum* KP^n sei die Menge aller Äquivalenzklassen, also $KP^n := \{[x] \,|\, x \in K^{n+1} \setminus \{0\}\}$. Wir versehen KP^n mit der Quotiententopologie.

(a) Zeigen Sie, dass KP^n für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ hausdorffsch ist und eine abzählbare Basis der Topologie hat.

(b) Sei $K = \mathbb{R}$. Für $j \in \{0, \dots, n\}$ sei $U_j := \{[x] \,|\, x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_j \neq 0\}$. Wir definieren $\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$

$$\varphi_j([x_0, \dots, x_n] := \frac{1}{x_j}(x_0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n).$$

Hierbei bedeutet die Notation $\widehat{x_j}$, dass der Eintrag mit x_j weggelassen wird. Zeigen Sie, dass die Abbildungen φ_j wohldefiniert sind und einen glatten Atlas auf $\mathbb{R}P^n$ definieren.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$, $x \mapsto [x]$ glatt ist, und dass für alle $x \in S^n$ die Ableitung $df|_x$ invertierbar ist.

(d) Modifizieren Sie die Konstruktion in (b), um einen glatten Atlas auf $\mathbb{C}P^n$ zu erhalten.

2

Zeigen Sie, dass die Abbildung $i : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^{n+1}$, $i([x]) = [x]$ eine glatte Abbildung ist. Welchen Rang hat $df|_{[x]}$? Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^{n+1} \setminus i(\mathbb{R}P^n)$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

3

(a) *Lokaler Umkehrsatz* Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Für ein $p \in M$ sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung, so dass $df|_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung U von p gibt, so dass $f(U)$ offen ist und so dass $f : U \to f(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

(b) *Satz über implizite Funktionen* Seien M^n und N^m differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Für ein $p \in M$ sei $df|_p$ surjektiv. Zeigen Sie, dass es eine Karte $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ von M mit $p \in U$ gibt, so dass

$$\varphi\big(U \cap f^{-1}(f(p)\big) = V \cap \mathbb{R}^{m-n}.$$

4 Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, falls $x - y \in \mathbb{Z}^n$. Wir versehen $T^n := \{[x] \,|\, x \in \mathbb{R}^n\}$ mit der Quotienten-Topologie. Zeigen Sie, dass T^n ein Hausdorffraum ist, dessen Topologie eine abzählbare Basis trägt. Zeigen Sie, dass es genau eine differenzierbare Struktur auf T^n gibt, so dass die Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$ glatt ist und die Ableitung $d\pi|_p$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$ invertierbar ist. *(Tipp: Nutzen Sie den lokalen Umkehrsatz, um die Eindeutigkeit der differenzierbaren Struktur zu zeigen.)*

Abgabe: Donnerstag, 6.5.2004 vor der Vorlesung
Geben Sie bitte Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie bitte alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`