Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004
Blatt 2 21. April 2004

---

1 Die folgenden Menge seien mit der Relativtopologie von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ versehen. Welche dieser Mengen sind topologische Mannigfaltigkeiten? Begründen Sie warum. Was ist die Dimension der topologischen Mannigfaltigkeiten?

(a) Das offene Intervall $(0,1)$.

(b) Das abgeschlossene Intervall $[0,1]$.

(c) Das offene Quadrat $(0,1)\times(0,1)$.

(d) Das abgeschlossene Quadrat $[0,1]\times[0,1]$.

(e) Der Rand des Quadrats $\partial([0,1]\times[0,1])$.

(f) Das Kreuz $(-1,1)\times\{0\}\cup\{0\}\times(-1,1)$

2 Seien $\mathcal{A}^1=\{\varphi_i\}_{i\in I}$ und $\mathcal{A}^2=\{\varphi_i\}_{i\in J}$ zwei glatte Atlanten auf M. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}^1\cup\mathcal{A}^2=\{\varphi_i\}_{i\in I\cup J}$ genau dann ein glatter Atlas auf M ist, falls $(\mathcal{A}^1)_{\max}=(\mathcal{A}^2)_{\max}$.

3 Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ heißt *zusammenhängend*, falls er **nicht** in zwei disjunkte offene nichtleere Teilmengen zerlegt werden kann, d. h. aus $X=U_1\cup U_2$, $U_i\in\mathcal{O}$, $U_1\cap U_2=\emptyset$, folgt $U_1=\emptyset$ oder $U_2=\emptyset$. Er heißt *wegzusammenhängend*, falls sich je zwei Punkte $p,q\in X$ durch einen stetigen Weg verbinden lassen, d. h. es gibt eine stetige Abbildung $c:[0,1]\to X$ mit $c(0)=p$ und $c(1)=q$.
Zeigen Sie, dass eine topologische Mannigfaltigkeit genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist.

4 Konstruieren Sie einen topologischen Raum, der eine Topologie mit abzählbarer Basis trägt und lokal homöomorhp zu $\mathbb{R}^n$ ist, der aber nicht hausdorffsch ist. (*Tipp: Nehmen Sie $\mathbb{R}$ und verdoppeln Sie die Null.)*

Abgabe: Donnerstag, 29.04.04 vor der Vorlesung
Bitte geben Sie Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`