Übungen zur Vorlesung „Semi-Riemannsche Geometrie“
Bernd Ammann, SS 2004
Blatt 1 — 20. April 2004

1 Bilden Sie für $A \subset \mathbb{R}$ das Innere und den Abschluss, und zwar bzgl. der Standardtopologie, der diskreten Topologie und der Klumpentopologie auf $\mathbb{R}$, wobei

(a) $A = [0,1]$,

(b) $A = (0,1)$,

(c) $A = \mathbb{Z}$,

(d) $A = \mathbb{Q}$.

2 Es tragen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ die Standardtopologien.
Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ mit der Standardtopologie übereinstimmt.

3 Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf X, $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) = [x]$.

(a) Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie $\mathcal{O}'$ auf $X/\sim$ tatsächlich eine Topologie ist.

(b) Zeigen Sie: $\pi : X \to X/\sim$ ist stetig.

(c) Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum und $f : X/\sim \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:
$$f : X/\sim \to Y \text{ ist stetig} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ \pi : X \to Y \text{ ist stetig.}$$

(d) Sei $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Wir definieren
$$s \sim t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s = t \text{ oder} \\ s = 0 \text{ und } t = 1, \text{ oder} \\ s = 1 \text{ und } t = 0. \end{cases}$$
Zeigen Sie: $[0,1]/\sim$ mit der Quotiententopologie ist homöomorph zu $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Standardtopologie.

4 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum, sei p ein weiterer Punkt, $p \notin X$. Setze $X^+ := X \cup \{p\}$. Wir definieren

$$\mathcal{O}_{X^+} := \mathcal{O}_X \cup \left\{ (X \setminus K) \cup \{p\} \;\middle|\; K \subset X \text{ kompakt} \right\} .$$

Zeigen Sie:

(1) $(X^+, \mathcal{O}_{X^+})$ ist ein topologischer Raum.

(2) X^+ ist kompakt.

(3) X^+ ist Hausdorffsch genau dann, wenn X *lokalkompakt* ist, d. h. jeder Punkt in x besitzt eine kompakte Umgebung.

(4) $(-1, 1)^+$ ist homöomorph zu S^1.

Man nennt X^+ die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X.

Abgabe: Dienstag, 27.04.04 vor der Vorlesung
Bitte geben Sie Ihren Namen auf ihren Lösungen an und heften Sie alle Blätter zusammen.
`http://www.math.uni-bonn.de/people/ammann/uebungen`