U(1)-Eichtheorie

Dennis Koh

3. Version

Zusammenfassung

Das Ziel dieses Vortrags ist es, einen Zusammenhang zwischen dem bisher entwickelten mathematischen Formalismus und den Anwendungen in der Physik herzustellen. Es wird sich zeigen, wie sich die klassischen homogenen Feldgleichungen der Elektrodynamik in natürlicher Weise hinter den Strukturen eines U(1)-Prinzipalfaserbündels verbergen.

Bevor wir die homogenen Maxwell-Gleichungen mithilfe der ersten Variation eines Wirkungsfunktionals ableiten und ein konkretes Beispiel (die Coulomb-Ladung) anschauen, werden zunächst kurz die benötigten mathematischen Daten, die zur Beschreibung der Physik im dritten Abschnitt vonnöten sind, aufgezeigt, die physkalische Fachterminologie und noch einige Strukturen eingeführt.

1 Mathematische Daten

- Eine glatte semi-riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g).
- Ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum V, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
- Eine Lie-Gruppe G und eine Darstellung $\rho : G \longrightarrow Gl(V)$.
- Ein glattes G-PFG über M bezeichnet mit $P(M, \pi, G)$ oder kurz P.

Die eben genannten Daten gibt man sich fest vor. Um hingegen später die sog. Yang-Mills-Gleichung abzuleiten, betrachtet man zusätzlich eine Variation von Zusammenhängen ω_t auf P und ein Wirkungsfunktional $\mathcal{L} : \{Zusammenhänge\ auf\ P\} \longrightarrow \mathbb{R}$, dessen stationären Punkte gerade die physkalisch relevante Feldkonfiguration liefern.

In Abwesenheit von Materiefeldern (werden im nächsten Vortrag über Spin Zero Electrodynamics erklärt und berücksichtigt) hat das Funktional typischerweise die Form:

$$\mathcal{L}(\omega) = \int_K |\mathcal{F}_\omega|^2 d\mu \quad \text{,wobei } K \subset M \text{ kompakte Teilmenge von } M \text{ sei.}$$

Notiz Es werden in diesem Vortrag die *Strukturgleichungen und die Bianchi-Identität*, die eine Konsequenz aus den Strukturgleichungen ist, vorausgesetzt, d.h. $\mathrm{D}^\omega\, \omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ für eine Zusammenhangsform ω auf P, $\mathrm{D}^\omega\, \Phi = d\Phi + [\omega, \Phi]$ für eine tensorielle $\mathfrak{g}$-wertige k-Form Φ auf P und $\mathrm{D}^\omega\, \Omega^\omega = (\mathrm{D}^\omega)^2 \omega = 0$. Details werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

2 Kleine Einführung in die Eichfeldtheorie

Von nun an sei, solange nicht anders ausdrücklich erwähnt, (M, g) eine glatte semi-riemannsche Mannigfaltigkeit, $P(M, \pi, G)$ ein glattes G-Prinzipalfaserbündel, kurz *G-PFB*, über M mit lokalen Trivialisierungen (U_α, Φ_α), mit Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow G$ und ω eine Zusammenhangs-1-Form auf P mit Werten in $\mathfrak{g}$, wobei $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$.

Oft werden wir auch die zugehörigen Schnitte $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, P)$, $s_\alpha(x) := \Phi_\alpha(x, e)$, selbst lokale Trivialisierungen nennen. Außerdem wird die "einsteinsche Summenkonvention" benutzt.

Definition Sei $\phi \in \Lambda^k(P, V)$ eine k-Form auf P mit Werten in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V. Definiere eine horizontale k-Form $\phi^H \in \Lambda^k(P, V)$ durch $\phi^H(X_1, \ldots, X_k) = \phi(X_1^H, \ldots, X_k^H)$, wobei X_i^H der horizontale Anteil der X_i ist, $i = 1, \ldots, k$. Dann ist die *äußere kovariante Ableitung* von ϕ definiert als $D^\omega \phi := (d\phi)^H \in \Lambda^{k+1}(P, V)$.

Definition Dann heißt

- ein Zusammenhang ω auf P ein *Eichzusammenhang* auf P.
- ein Schnitt $s \in \Gamma(M, P)$ eine *globale Eichung* oder auch nur *Eichung*.
- ein Pull-Back $\mathcal{A} := s^*\omega$ eines Zusammenhanges ω mit einer globalen Eichung ein *Eichpotential* auf M bzgl. $s \in \Gamma(M, P)$.
- ein lokaler Schnitt $s_u \in \Gamma(U, P)$, $U \subset M$ offen, eine *lokale Eichung*.
- ein Pull-Back $\mathcal{A}_u := s_u^*\omega$ eines Eichzusammenhangs ω mithilfe einer lokalen Eichung s_u ein *lokales Eichpotential* auf M.
- die zum Zusammenhang ω gehörige Krümmungsform $\Omega^\omega := D^\omega\omega$ die *Eichfeldstärke* auf P zum Eichzusammenhang ω.
- der Pull-Back eines Eichfeldes Ω^ω mit einer globalen Eichung bzw. lokalen Eichung *Feldstärke* $\mathcal{F} := s^*\Omega^\omega$ bzw. *lokale Feldstärke* $\mathcal{F}_u := s_u^*\Omega^\omega$ auf M.

Im Falle eines $U(1)$-Prinzipalfaserbündels ist ein Element $e^{\mathrm{i}\Theta} \in U(1)$ vollständig durch seine Phase Θ bestimmt. Lokale Schnitte $s : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$, U eine offene kontrahierbare Teilmenge von M, können daher als *Wahl einer Phase* $\Theta : U \longrightarrow [0, 2\pi[$ angesehen werden. Deswegen wird in der physikalischen Literatur das PFB P oft als *Raum der Phasenfaktoren* bezeichnet.

Definition Die Menge

$$\mathcal{G}(P) := \{f \in Diff(P) |\, \pi \circ f = \pi \text{ und } f(ug) = f(u)g \quad \forall g \in G, \forall u \in P\}$$

heißt *Eich(transformations)gruppe*. Ein Element $f \in \mathcal{G}(P)$ heißt eine *Eichtransformation.*

Lemma *Ist $f \in \mathcal{G}(\mathrm{P})$ und ω ein Zusammmenhang auf P, so ist $f^*\omega$ ebenfalls ein solcher.*

Denn sei $A \in T_eG \cong \mathfrak{g}$ und $(\lambda A)(u) = d(\lambda_u)(A)$ das zugehörige fundamentale Vektorfeld auf P, wobei $\lambda_u : G \longrightarrow P$ gegeben ist durch $\lambda_u(g) = ug$ für $u \in P$, $g \in G$, dann gilt

$$\begin{aligned}
(f^*\omega)\big((\lambda A)(u)\big) &= \omega\big(df(\lambda A)(u)\big) \\
&= \omega\big(dfd(\lambda_u)(A)\big) \\
&= \omega\big(d(\lambda_{f(u)})(A)\big) && \text{(wegen } f \circ \lambda_u = \lambda_{f(u)}) \\
&= A && \text{(charakterisierende Eigenschaft von } \omega)
\end{aligned}$$

Aufgrund von $R_g \circ f = f \circ R_g$ haben wir
$R_g^* f^*\omega = (f \circ R_g)^*\omega = f^* R_g^*\omega = f^* Ad_{g^{-1}}\omega = Ad_{g^{-1}} f^*\omega$ □

Notation Nenne $\mathcal{C}$ den Raum der Zusammenhangs-1-Formen auf P.

Man überprüft mit dem Lemma nun leicht den

Satz 1 *Sei P ein PFB über M mit Eichgruppe $\mathcal{G}(\mathrm{P})$. Dann operiert $\mathcal{G}(\mathrm{P})$ auf $\mathcal{C}$ von rechts duch*

$$\mathcal{C} \times \mathcal{G}(\mathrm{P}) \longrightarrow \mathcal{C}, \quad (\omega, f) \longmapsto f^*\omega$$

Man spricht davon, eine Eichtransformation durchzuführen, wenn man so ein f^* auf ω anwendet. Dieser Vorgang kann als eine "Phasentransformation" im Raum der Phasenfaktoren P interpretiert werden.

Notiz *(lokale Darstellung von Eichtransformationen und eichtransformierten Zusammenhängen)*
In der physikalsischen Literatur "fällt die Formel für die lokale Darstellung von eichtransformierten Zusammenhängen oft vom Himmel" bzw. wird ein eichtransformierter Zusammenhang über seine lokale Darstellung definiert.

Wir werden nun sehen wie die Formel in natürlicher Weise folgt, wenn man einen eichtransformierten Zusammenhang als Pull-back mit einer Eichtransformation definiert. Dazu betrachte $\Phi_\alpha : U_\alpha \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ eine lokale Trivialisierung und $f : P \longrightarrow P$ eine Eichtransformation. Offenbar ist $\Phi_\beta := f \circ \Phi_\alpha : U_\beta \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_\beta)$, $U_\beta := U_\alpha$, auch eine lokale Trivialisierung.

Die Übergangsfunktionen hierzu sind nach Def. gegeben durch
$g_{\alpha\beta}(x) = \Phi_{\alpha,x}^{-1} \circ \Phi_{\beta,x} = \Phi_{\alpha,x}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\alpha,x} : G \longrightarrow G$, mit $\Phi_{\alpha,x}(h) = \Phi_\alpha(x,h)$ und $\Phi_{\beta,x}(h) = \Phi_\beta(x,h)$. Da dies nur von α abhängt, setze $f_{\alpha,x} := g_{\alpha\beta}(x)$ und weiter $f_\alpha(x) := f_{\alpha,x}(e)$. Damit sieht man, daß sich die lokale Darstellung $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$ von $f : P \longrightarrow P$ als Übergangsfunktion $g_{\alpha\beta}$ interpretieren lässt. Umgekehrt kann man Übergangsfunktionen als eine lokale Version von Eichtransformationen

ansehen. Nach Korollar 8 hat die lokale Darstellung von $f^*\omega$ also mit $s_\alpha(x) = \Phi_\alpha(x,e)$, $s_\beta(x) = \Phi_\beta(x,e)$, $\mathcal{A}_\alpha := s_\alpha^*\omega$ und $\mathcal{A}_{f,\alpha} := s_\alpha^*(f^*\omega)$ die Gestalt

$$\mathcal{A}_{f,\alpha} = s_\beta^*\omega = Ad_{g_{\beta\alpha}}\mathcal{A}_\alpha + g_{\beta\alpha}dg_{\beta\alpha}^{-1} = Ad_{f_\alpha^{-1}}\mathcal{A}_\alpha + f_\alpha^{-1}df_\alpha$$

Definition Sei $\Phi \in \Lambda^k(P,V)$, wobei $\Lambda^k(P,V)$ die Menge der k-Formen auf P mit Werten in V, V ein endlich-dim. Vektorraum, bezeichne. Sei $\rho : G \longrightarrow Gl(V)$ eine Darstellung auf V.
Eine k-Form Φ heißt *pseudo-tensoriell vom Typ* (ρ, V), falls sie G-äquivariant ist bzgl. ρ, d.h. falls

$$R_g^*\Phi = \rho(g^{-1})\Phi \quad \forall g \in G$$

und *tensoriell vom Typ* (ρ, V), falls sie horizontal ist als auch pseudo-tensoriell vom Typ (ρ, V). Die Menge all solcher tensoriellen k-Formen vom Typ (ρ, V) bezeichnen wir mit $\Lambda_G^k(P,V)$.

Zum Beispiel ist eine Zusammenhangsform eine vertikale, pseudo-tensorielle k-Form vom Typ $(Ad, \mathfrak{g})$.

Bemerkung 2 Zwar $\mathcal{C} \neq \Lambda_G^1(P,\mathfrak{g})$, aber für fixiertes $\omega \in \mathcal{C}$ ist die Abbildung $\Lambda_G^1(P,\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{C}, \quad \tau \longmapsto \tau + \omega$ bijektiv.

Denn ist $\tau \in \Lambda_G^1(P,\mathfrak{g})$ und λA ein fundamentales Vektorfeld, dann gilt $(\tau+\omega)(\lambda A) = \tau(\lambda A) + \omega(\lambda A) = \omega(\lambda A) = A$ und außerdem $R_g^*(\tau+\omega) = R_g^*\tau + R_g^*\omega = Ad_{g_{-1}}\tau + Ad_{g_{-1}}\omega = Ad_{g_{-1}}(\tau+\omega)$, also $\tau + \omega \in \mathcal{C}$. Umgekehrt gilt natürlich $\tilde{\omega} - \omega \in \Lambda_G^1(P,\mathfrak{g})$, für $\tilde{\omega} \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ ist somit ein affiner Raum und man kann je zwei Zusammenhangsformen durch ein Kurve, nämlich die Verbindungsstrecke, verbinden. Wegen $\gamma(0) = \omega$ und $\dot{\gamma}(0) = \tau$ für eine Kurve $\gamma(t) = \omega + t\tau$, kann man $\Lambda_G^1(P,\mathfrak{g})$ als eine Art "Tangentialraum" $T_\omega\mathcal{C}$ an die "Mannigfaltigkeit" $\mathcal{C}$ ansehen.

Notation Sei F eine Links-G-Mannigfaltigkeit mit Linksoperation $\rho : G \times F \longrightarrow F$, dann bezeichne mit E stets das zu P assoziierte Faserbündel $P \times_\rho F = P \times F/G$

Definition Sei $P(M,\pi,G)$ ein PFB wie oben und F eine Links-G-Mannigfaltigkeit mit Linksoperation $\rho : G \times F \longrightarrow F$, dann nennt man die Menge der G-äquivarianten Abbildungen von P nach F

$$\mathcal{F}_G(P,F) = \{f : P \to F |\, f(ug) = \rho(g^{-1})f(u)\, \forall g \in G\}$$

wenn man die Abbildung $\rho(g,\cdot) : F \longrightarrow F$ mit $\rho(g)$ bezeichnet.

Bemerkung 3
Jedes $u \in P$ induziert einen Isomorphismus $u : F \longrightarrow E_{\pi(u)}$, definiert durch $u(f) := [u,f]$. Man sieht sofort, daß gilt

$$ug(f) = u(gf) \quad bzw. \quad R_g(u) = u \circ L_g \quad \forall g \in G, \forall f \in F$$

Weiterhin besteht die 1-1-Korrespondenz $\mathcal{F}_G(P,F) \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \Gamma(M,E)$, denn für $f \in \mathcal{F}_G(P,F)$ definiere $s_f \in \Gamma(M,E)$ durch

$$s_f(x) := [u, f(u)] \text{ für ein } u \in \pi^{-1}(x)$$

Wegen der Äquivarianz von f ist dies wohldefiniert. Umgekehrt zu $s \in \Gamma(M,E)$ definiere $f_s \in \mathcal{F}_G(P,F)$ durch

$$f_s(u) := u^{-1}(s(\pi(u)))$$

Diese Korrespondenz lässt sich ausdehnen.

Bemerkung 4 Nun ordne $\Phi \in \Lambda^k_G(P,V)$ die k-Form $s_\Phi \in \Lambda^k(M,E)$ auf M zu mit Werten in $E = P \times_\rho V$ durch

$$s_\Phi(x)(X_1,\dots,X_k) := u\big(\Phi(u)(Y_1,\dots,Y_k)\big), \quad \forall x \in M$$

mit $u \in \pi^{-1}(x)$ und Y_i, so daß $d\pi(Y_i) = X_i$ für $i = 1,\dots,k$. Wegen der Tensorialität von Φ ist dies unabhängig von der Wahl der Y_i und u.

Ordne umgekehrt $s \in \Lambda^k(M,E)$ die Form $\Phi_s \in \Lambda^k_G(P,V)$ zu, definiert durch

$$\Phi_s(u)(Y_1,\dots,Y_k) := u^{-1}\big((\pi^* s)(u)(Y_1,\dots,Y_k)\big)$$

für $Y_1,\dots,Y_k \in T_uP$. Wir haben also gezeigt, dass sich die Korrespondenz aus Bermerkung 3 erweitern läßt zu

$$\Lambda^k_G(P,V) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \Lambda^k(M,E)$$

Es gilt nun der

Satz 5 *Die folgenden Gruppen sind paarweise isomorph*

1. $\mathcal{G}(P)$: *Die Eichgruppe*
2. $\mathcal{F}_G(P,G)$: *Gruppe der G-äquivarianten Abbildungen bzgl. der Operation $aut : G \longrightarrow Gl(G)$ durch innere Automorphismen $aut_g(h) = ghg^{-1}$ $g,h \in G$.*
3. $\Gamma(M,E)$: *Gruppe der Schnitte im assoziierten Faserbündel $E := aut(P) := P \underset{aut}{\times} G$.*

Dabei ist die Gruppenmultiplikation auf $\mathcal{F}_G(P,G)$ und $\Gamma(M,E)$ punktweise erklärt.

Beweis: Die Isomorphie der letzten beiden Gruppen ergibt sich als Spezialfall aus der 1:1-Korrespondenz von Bemerkung 3 mit $F = G$ und $\rho = aut$. Die Isomorphie der ersten beiden Gruppen sieht man so.
Für $f \in \mathcal{F}_G(P,G)$ definiere $\tau : P \longrightarrow P$ durch $\tau(p) := pf(p)$. Da

$$\begin{aligned}\tau(pg) &= pgf(pg) = pgg^{-1}f(p)g \\ &= pf(p)g = \tau(p)g\end{aligned}$$

ist $\tau \in \mathcal{G}(P)$. Ist umgekehrt $\tau \in \mathcal{G}(P)$, dann definiere $f \in \mathcal{F}_G(P,G)$ durch die Beziehung

$$\tau(p) = pf(p)$$

Bemerke, daß $pgf(pg) = \tau(pg) = \tau(p)g = pf(p)g \Rightarrow f(pg) = g^{-1}f(p)g \quad (*)$
Schließlich sei $\tau, \tau' \in \mathcal{G}(P)$ mit $\tau(p) = pf(p)$ und $\tau'(p) = pf'(p) =: p'$, dann ist

$$\begin{aligned}(\tau \circ \tau')(p) &= \tau(p') = p'f(p') \\ &= pf'(p)f(pf'(p)) \\ &= p(f(p)f'(p)), \qquad \text{wegen } (*)\end{aligned}$$

womit der Beweis endet.

Wir wollen nun das Transformationverhalten von lokalen Eichpotentialen und lokalen Feldstärken bei Kartenwechseln (Eichtransformationen) mit Übergangfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ untersuchen. Dies ist besonders für Physiker interessant, da sich im Falle eines $U(1)$-PFB's herausstellen wird, dass lokale Feldstärken unter einem Kartenwechsel unverändert bleiben, d.h. sie sind "eichinvariant" unter Eichtransformationen. Die Physik hängt also nicht von Wahl der lokalen Eichung ab.

Übungsaufgabe 6 Die lokalen Trivialisierungen $s_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ transformieren sich bei einem Kartenwechsel mit Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow G$ gmäß $s_\alpha(x) = s_\beta(x)g_{\beta\alpha}(x)$ für alle x aus $U_{\alpha\beta}$.

Satz 7 *Ist $s : M \longrightarrow P$ ein Schnitt in P und $g : M \longrightarrow G$ eine G-wertige Funktion auf M, so gilt mit dem Schnitt $\tilde{s} = sg$ für $\widetilde{\mathcal{A}} := \tilde{s}^*\omega$, $\mathcal{A} := s^*\omega$*

$$\widetilde{\mathcal{A}} = Ad_{g^{-1}} \circ \mathcal{A} + d(l_{g^{-1}}) \circ dg \tag{1}$$

Notiz In Anlehnung an die Matrixschreibweise für Matrix-Lie-Gruppen schreibt man oft auch lax $g^{-1}dg$ statt $d(l_{g^{-1}}) \circ dg$, auch wenn G keine Matrix-Lie-Gruppe ist.

Beweis von Satz 7 Sei $v \in T_xM$ und $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = v$, dann gilt (an der Stelle $t = 0$)

$$\begin{aligned} d\tilde{s}(v) &= \frac{d}{dt}\tilde{s}(\gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big[s(\gamma(t))g(\gamma(t))\big] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big[s(x)g(\gamma(t))\big] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big[s(\gamma(t))g(x)\big] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big[\tilde{s}(x)g(x)^{-1}g(\gamma(t)\big] + d(R_{g(x)}) \circ ds(v) \\ &= \Big[d\lambda_{\tilde{s}(x)}\Big(\underbrace{d(l_{g(x)^{-1}}) \circ dg(v)}_{\in T_eG}\Big)\Big](\tilde{s}(x)) + d(R_{g(x)}) \circ ds(v) \end{aligned} \tag{2}$$

$\Rightarrow \widetilde{\mathcal{A}}(v) = \omega(d\tilde{s}(v)) = d(l_{g(x)^{-1}}) \circ dg(v) + Ad_{g(x)^{-1}}\big(\mathcal{A}(v)\big)$. □

Setzt man nun in Satz 7 $\tilde{s} = s_\alpha$, $s = s_\beta$ und $g = g_{\beta\alpha}$, so erhält man das wichtige

Korollar 8 (Transformationsformel für lokale Eichpotentiale)
Für $\mathcal{A}_\alpha = s_\alpha^*\omega$, $\mathcal{A}_\beta = s_\beta^*\omega$ gilt mit den Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ die Transformationsformel

$$\mathcal{A}_\alpha = Ad_{g_{\alpha\beta}}(\mathcal{A}_\beta) + g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1} \tag{3}$$

Dies wird im Falle einer Matrix-Liegruppe zu $\mathcal{A}_\alpha = g_{\alpha\beta}\mathcal{A}_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1}$.

Definition Sei $\phi \in \Lambda^k(P,V)$, $\psi \in \Lambda^l(P,V)$, $(e_i)_{1\le i\le dim(V)}$ eine Basis von V und $h : V \times V \longrightarrow V$ eine bilineare Abbildung. Schreibe $\phi = \phi^\alpha \otimes e_\alpha$ und $\psi = \psi^\beta \otimes e_\beta$ mit eindeutig bestimmten $\mathbb{K}$-wertigen k-bzw. l-Formen ϕ^α bzw. ψ^β. Man setzt nun

$$\phi \wedge_h \psi := \phi^\alpha \wedge \psi^\beta h(e_\alpha, e_\beta) \tag{4}$$

Für $V = \mathfrak{g}$ und $h = [\cdot,\cdot]$ schreibt man kurz

$$[\phi,\psi] = \phi^\alpha \wedge \psi^\beta [e_\alpha, e_\beta] = c_{\alpha\beta}^k (\phi^\alpha \wedge \psi^\beta) e_k\,, \tag{5}$$

wobei $c_{\alpha\beta}^k$ die Strukturkonstanten von G sind.

Übungsaufgabe 9 Zeige, daß für $\phi \in \Lambda^k(P,\mathfrak{g})\,\psi \in \Lambda^l(P,\mathfrak{g})$ und für $\zeta \in \Lambda^m(P,\mathfrak{g})$ gilt
(a) $[\phi,\psi] = -(-1)^{kl}[\psi,\phi]$
(b) $(-1)^{km}[\phi,[\psi,\zeta]] + (-1)^{lk}[\psi,[\zeta,\phi]] + (-1)^{ml}[\zeta,[\phi,\psi]] = 0$
(c) $d[\phi,\psi] = [d\phi,\psi] + (-1)^k[\phi, d\psi]$

Satz 10 *Für alle $g \in G$ gilt $R_g^*\Omega^\omega = Ad_{g^{-1}}\Omega^\omega$.*

Beweis An der Definition der "Lie-Klammer für Formen" (5) sieht man, daß sie unter der Pull-Back Operation erhalten bleibt, d.h. $F^*[\phi,\psi] = [F^*\phi, F^*\psi]$. Daher hat man

$$\begin{aligned} R_g^*\,\Omega^\omega &= R_g^*\big(d\omega + 1/2[\omega,\omega]\big) = dR_g^*\omega + 1/2[R_g^*\omega, R_g^*\omega] && \text{(Strukturgleichung)} \\ &= dAd_{g^{-1}}\omega + 1/2[Ad_{g^{-1}}\omega, Ad_{g^{-1}}\omega] && \text{(Äquivarianz)} \\ &= Ad_{g^{-1}}\big(d\omega + 1/2[\omega,\omega]\big) \\ &= Ad_{g^{-1}}\,\Omega^\omega\,, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Bemerkung 11 Für die zu $\mathcal{A}_\alpha = s_\alpha^*\omega$ gehörige lokale Feldstärke $\mathcal{F}_\alpha = s_\alpha^*\,\Omega^\omega$ gilt

$$\mathcal{F}_\alpha = d\mathcal{A}_\alpha + \frac{1}{2}[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\alpha] \tag{6}$$

Denn, siehe Beweis von Satz 10. Mit dieser Formel können wir also direkt die lokale Feldstärke aus dem lokalen Eichpotential berechnen, was uns nacher noch im Abschnitt 3 sehr nützlich sein wird.

Korollar 12 (Transformationsformel für lokale Feldstärken)
Seien (U_α, s_α) und (U_β, s_β) lokale Trivialisierungen mit Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow G$. Dann gilt die Transformationsformel

$$\mathcal{F}_\alpha = Ad_{g_{\beta\alpha}^{-1}} \mathcal{F}_\beta \tag{7}$$

Im Falle einer Matrix-Lie-Gruppe lautet die Formel also $\mathcal{F}_\alpha = g_{\beta\alpha}^{-1} \mathcal{F}_\beta \, g_{\beta\alpha}$.

Beweis Aus dem Beweis von Satz 7, Gleichung (2) wissen wir, daß für $v \in T_x M$ gilt

$$ds_\alpha(v) = \Big[d\lambda_{s_\alpha(x)} \Big(d(l_{g_{\beta\alpha}(x)^{-1}}) \circ dg_{\beta\alpha}(v) \Big) \Big] (s_\alpha(x)) + d(R_{g_{\beta\alpha}(x)}) \circ ds_\beta(v)$$

Da Ω^ω nach Definition horizontal ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha(v, \tilde{v}) &= \Omega^\omega\big(ds_\alpha(v), ds_\alpha(\tilde{v})\big) \\ &= \Omega^\omega\big(dR_{g_{\beta\alpha}(x)} ds_\beta(v), dR_{g_{\beta\alpha}(x)} ds_\beta(\tilde{v})\big) \\ &= Ad_{g_{\beta\alpha}^{-1}(x)} \mathcal{F}_\beta(v, \tilde{v}) \qquad\qquad \text{(mit Satz 8)} \end{aligned}$$

□

Schaut man sich nicht nur $U(1)$-Prinzipalfaserbündel, sondern z.B. auch SU(n)-PFB mit Lie-Algebra $\mathfrak{su}(n)$ an, so muss man das Integral auf vektorwertige Formen verallgemeinern. Um den Begriff für Anwendungen bereitzustellen, wollen wir diesen nun kurz einführen.

Wir überlegen zuerst, wie sich die bereits eingeführte Lie-Klammer von Formen ausdrücken lässt, wenn $\mathfrak{g}$ eine Matrix-Lie-Algebra, enthalten in $M(n, \mathbb{K})$, ist. Bezeichnet E_{ij} die Matrix, welche überall Nullen als Einträge und den Koeffzienten in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte $1 \in \mathbb{K}$ hat und schreibt man $\alpha \in \Lambda^p(P, \mathfrak{g})$, $\beta \in \Lambda^q(P, \mathfrak{g})$ als $\alpha = \alpha^{ij} E_{ij}$, $\beta = \beta^{kl} E_{kl}$, mit eindeutig bestimmten $\mathbb{K}$-wertigen Formen α^{ij}, β^{kl}, so liefert eine kurze Rechung die Identität

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] = \alpha^{ij} \wedge \beta^{kl} [E_{ij}, E_{kl}] &= \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha^{ik} \wedge \beta^{kj} - (-1)^{pq} \beta^{ik} \wedge \alpha^{kj}\big) E_{ij} \\ &= \big(\alpha \wedge \beta - (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha\big)^{ij} E_{ij} \\ &= \alpha \wedge \beta - (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \end{aligned}$$

Der Ausdruck rechts vom zweiten Gleichheitszeichen ist dabei als Matrixmultiplikation mit dem wedge-Produkt als Multiplikation zu lesen.
Man kann matrixwertige Formen also genauso multplizieren, wie man es aus der Linearen Algebra gewohnt ist

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i,l,k} \alpha^{ik} \wedge \beta^{kl} E_{il}$$

Darum definiert man ganz analog eine Spur durch

$$\mathrm{Spur}(\alpha \wedge \beta) := \sum_{i,k} \alpha^{ik} \wedge \beta^{ki} \tag{8}$$

Beachte, daß dies keine Zahl, sondern eine $\mathbb{K}$-wertige Form ist.

Bemerkung 13 Sei (M,g) eine kompakte semi-riem. orient. Mgf. ohne Rand mit und E ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M vom Rang N. E trage ein inneres Produkt h. Schreibe $\phi,\,\psi \in \Lambda^p(M,E)$ lokal als $\phi = \phi^i \otimes s_i$, $\psi = \psi^l \otimes s_l$ mit lokalen Basisschnitten s_i, $i = 1,\ldots,N$. Die durch g auf den Formen induzierte Metrik bezeichne ebenfalls mit g. Dann bekommt man zunächst für $x \in M$ ein inneres Produkt $\tilde{g}_x$ auf $\Lambda^p_x(M,E)$ definiert durch

$$\tilde{g}_x(\phi(x),\psi(x)) = g_x(\phi^i(x),\psi^l(x))h_x(s_i(x),s_l(x))$$

und durch Integration über M ein inneres Produkt

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \Lambda^p(M,E)\times\Lambda^p(M,E) \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\phi,\psi) \longmapsto \langle\phi,\psi\rangle := \int\limits_M \tilde{g}(\phi,\psi)d\mu\,,$$

wobei $d\mu$ die Volumenform auf M ist. Setze $|\phi|^2 = \tilde{g}(\phi,\phi)$ und $\|\phi\|^2 = \langle\phi,\phi\rangle$. Dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine positiv-definite symmetrische bzw. hermitische Form, wenn dies für h gilt und g zugleich eine riemannsche Metrik ist. In diesen Fällen sind $|\cdot|$ und $\|\cdot\|$ Normen.

Auch der Hodge-$*$-Operator lässt sich in naheliegender Weise zu einem Operator $* : \Lambda^p(M,E) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(M,E)$, wobei $n = dim(M)$, erweitern, definiert durch $*(\phi^i \otimes s_i) := *\phi^i \otimes s_i$

Wir betrachten zunächst ein $Gl_n(\mathbb{C})$-PFB über einer semi-riem. Mgf. (M,g) mit assoziiertem Vektorbündel $\widehat{E} := P \times_{id} \mathbb{C}^n$ und $\widetilde{E} := End(\widehat{E}) \cong \widehat{E}^* \otimes \widehat{E}$ mit der punktweise definierten positiv definiten hermitischen Form $h_x(A,B) :=$Spur(A^*B) auf jeder einzelnen Faser $\widetilde{E}_x \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.
Für das $Gl_n(\mathbb{C})$-PFB und das Vektorbündel $\widetilde{E}$ gilt dann mit der durch Gleichung (8) eingeführten Spur auf matrixwertigen Formen und dem in Bemerkung 13 eingeführten inneren Produkt für $\mathcal{F},\mathcal{Q} \in \Lambda^k(M,\widetilde{E})$ die Identität

$$\langle\mathcal{F},\mathcal{Q}\rangle = \int\limits_M \mathrm{Spur}(\mathcal{F}\wedge *\mathcal{Q})$$

und daher auch

$$|\mathcal{F}|^2 d\mu = \mathrm{Spur}(\mathcal{F}\wedge *\mathcal{F}) \quad \text{und } \|\mathcal{F}\|^2 = \int\limits_M |\mathcal{F}|^2 d\mu$$

Vorsicht! Durch die letzten beiden Ausdrücke ist i. Allg. keine Norm gegeben, da g eine semi-riem. Metrik ist.

Hat man hingegen ein $SU(n)$-Prinzipalfaserbündel P über einer riem. Mgf. (M,g) mit assoziierten Vektorbündel $E = Ad(P) = P \times_{Ad} \mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})|\, A + A^* = 0, \mathrm{Spur}(A) = 0\}$, vorliegen ist, so ist die Einschränkung der obigen pos. def. hermitischen Form h auf das Unterbündel $E \cong \widetilde{\mathfrak{su}}(n) \subset \widetilde{E}$ eine riemannsche Metrik, wobei $\widetilde{\mathfrak{su}}(n)$ das Unterbündel von $\widetilde{E}$ sei, deren Fasern isomorph zu $\mathfrak{su}(n)$ sind. Da (M,g) als riemannsch vorausgesetzt war, ist auch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ riemannsch und $|\cdot|$, $\|\;\cdot\|$ sind Normen.

Auf einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zur Lie-Gruppe G gibt es eine Bilinearform *kill*, die invariant gegenüber der Operation Ad von G auf $\mathfrak{g}$ ist. Sie heißt *Killing-Form* und berechnet sich durch

$$kill(A,B) = \mathrm{Spur}(ad_A \circ ad_B) \quad \text{für } A,\ B \in \mathfrak{g}.$$

Im Fall $G = Gl_n(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ heißt das für zwei Matrizen A und B $kill(A,B) = 2n\mathrm{Spur}(AB)$ - $2\mathrm{Spur}(A)\mathrm{Spur}(B)$. Auf $\mathfrak{su}(n)$ reduziert sich dies zu $kill(A,B) = 2n\mathrm{Spur}(A,B) \Rightarrow -kill(A,B) = 2n\mathrm{Spur}(A^*,B) = 2nh(A,B)$. Die beiden Metriken *kill* und h unterscheiden sich nur um einen Vorfaktor und liefern daher die gleichen Strukturen.

Bzgl. des Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ existiert ein zur kovarianten Ableitung $\mathrm{D}^\omega : \Lambda^p(M,E) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(M,E)$ adjungierter Operator $\delta^\omega = (\mathrm{D}^\omega)^\dagger : \Lambda^{p+1}(M,E) \longrightarrow \Lambda^p(M,E)$ definiert durch

$\delta^\omega := -(-1)^{Np} * \mathrm{D}^\omega * = (-1)^{p+1} *^{-1} \mathrm{D}^\omega *.$

Für $\mathcal{F} \in \Lambda^p(M,E)$, $\mathcal{Q} \in \Lambda^{p+1}(M,E)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{D}^\omega \mathcal{F}, \mathcal{Q}\rangle - \langle \mathcal{F}, \delta^\omega \mathcal{Q}\rangle &= \int_M \mathrm{Spur}(\mathrm{D}^\omega\, \mathcal{F} \wedge * \mathcal{Q}) - \int_M \mathrm{Spur}(\mathcal{F} \wedge * \,\delta^\omega \mathcal{Q}) \\
&= \int_M \mathrm{Spur}(\mathrm{D}^\omega\, \mathcal{F} \wedge * \mathcal{Q} + (-1)^p\, \mathcal{F} \wedge \mathrm{D}^\omega * \mathcal{Q}) \\
&= \int_M \mathrm{Spur}(\mathrm{D}^\omega (\mathcal{F} \wedge * \mathcal{Q})) \\
&= \int_M d\mathrm{Spur}(\mathcal{F} \wedge * \mathcal{Q}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit gilt wegen $\mathrm{Spur}(\mathrm{D}^\omega\, \mathcal{Q}) = \mathrm{Spur}(d\,\mathcal{Q} + [\mathcal{A}, \mathcal{Q}]) = \mathrm{Spur}(d\,\mathcal{Q}) + \mathrm{Spur}(\underbrace{[\mathcal{A}, \mathcal{Q}]}_{=0}) = \mathrm{Spur}(d\,\mathcal{Q}) = d\mathrm{Spur}(\mathcal{Q})$ und die letzte wegen des Satzes von Stokes.

3 U(1)-Eichtheorie und klassische Elektrodynamik

In diesem Abschnitt wenden wir den bisher entwickelten Formalismus auf ein $U(1)$-Prinzipalbündel über einer vier-dimensionalen Lorentz-Mannigfaltigkeit M mit Zusammenhangsform ω an, mit $G=U(1)=\{e^{\mathrm{i}\,\Theta}|\,\Theta\in\mathbb{R}\}$ und zughöriger Lie-Algebra $\mathfrak{g}=\mathfrak{u}(1)=\{\mathrm{i}\,t|\,t\in\mathbb{R}\}$. Sei (U_α, s_α) eine lokale Eichung, $\mathcal{A}_\alpha = s_\alpha^*\omega = -\mathrm{i}\,A_\alpha$, $A_\alpha \in \Lambda^1(U_\alpha,\mathbb{R})$. Die lokale Feldstärke bzgl. s_α ist gegeben durch $\mathcal{F}_\alpha = s_\alpha^*\Omega = -\mathrm{i}\,F_\alpha = -\mathrm{i}\,dA_\alpha$. Sei (U_β, s_β) eine weitere lokale Eichung, so daß $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Da $U(1)$ abelsch ist, liefert Korollar 12 unmittelbar $\mathcal{F}_\alpha = g_{\beta\alpha}^{-1}\mathcal{F}_\beta\, g_{\beta\alpha} = \mathcal{F}_\beta$, d.h. $F_\alpha = F_\beta$. Damit ist auf ganz M eine Feldstärke $\mathcal{F}$ global definiert, was die Eichinvarianz der physikalischen Feldgrößen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ widerspiegelt. Im nicht-abelschen Fall verhält sich die Sache i.Allg. anders. Nichtsdestoweniger ist das Eichpotential nur eine lokale von der gewählten Eichung abhängige Größe. Nach Korollar 8 gilt nämlich unter Berücksichtigung der Kommutativität von $U(1)$ die Gleichung

$$\mathcal{A}_\alpha = g_{\alpha\beta}\,\mathcal{A}_\beta\, g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1} = \mathcal{A}_\beta + g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Drückt man nun die Funktion $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U(1)$ mit einer reellwertigen Funktion $\Phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{R}$ aus, d.h. $g_{\alpha\beta}(x) = e^{-\mathrm{i}\,\Phi_{\alpha\beta}(x)}$, und berechnet $g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1} = -\mathrm{i}\,d\Phi_{\alpha\beta}$, so erhält man $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\beta - \mathrm{i}\,d\Phi_{\alpha\beta}$ bzw.

$$A_\alpha = A_\beta + d\Phi_{\alpha\beta}\,,$$

was genau der traditionellen Beziehung zwischen zwei Eichpotentialen entpricht. Hier sieht man nun wie sich eine Eichtransformation als Phasenverschiebung ansehen läßt: Verschiebung von $\mathcal{A}_\beta$ um das Differential $d\Phi_{\alpha\beta}$ der Phase ergibt $\mathcal{A}_\alpha$.

Wir wollen nun die klassische Beziehung zwischen den elektromagnetischen Feldgrößen und dem lokalen Eichpotential herleiten. Sei dazu $\Phi : U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ eine lokale Trivialisierung über $U \subset M$, offen. Sei $s : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ die zugehörige lokale Eichung, definiert durch $s(x) := \Phi(x, e)$ für $x \in U$. O.B.d.A. liege U ganz in einer Karte von M. Drücke das lokale Eichpotential und die Feldstärke in dieser Karte aus, d.h. $\mathcal{A} := s^*\omega = -\mathrm{i}\,A = -\mathrm{i}\,A_k dx^k$ und $\mathcal{F} := s^*\Omega = -\mathrm{i}\,F = -\mathrm{i}\,\frac{1}{2}F_{lm}dx^l \wedge dx^m$. Gleichung (6) aus Bemerkung 11 liefert nun $\mathcal{F} = d\,\mathcal{A} + \frac{1}{2}\underbrace{[\mathcal{A},\mathcal{A}]}_{=0}$, da $U(1)$ abelsch ist und damit $F = dA$, d.h. in Komponenten

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}F_{lm}dx^l \wedge dx^m = d(A_k dx^k) \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{2}F_{lk}dx^l \wedge dx^k = \frac{\partial A_k}{\partial x^l}dx^l \wedge dx^k \end{aligned} \tag{9}$$

Es gilt

$$F_{lk} = -F_{kl} = \frac{\partial A_k}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^k}$$

Setzt man noch $E_j = F_{j0}$ für $j = 1,2,3$ und $F_{jk} = B_l$ für $j,k,l \in \{1,2,3\}$ zyklisch oder im Matrixschreibweise

$$(F_{kl}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $(A_0, A_1, A_2, A_3) = (-V, A_1, A_2, A_3)$, so besagt (9)

$$E_j = -\frac{\partial V}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^0} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E} = -\mathrm{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

und

$$B_l = \frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} = (\mathrm{rot}\vec{A})_l \quad \text{bzw.} \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$$

mit j,k,l zyklisch. Die beiden klassischen Gleichungen sind also in der einen $F = dA$ zusammengefasst.

Zuguterletzt, bevor wir uns das Beispiel der Coulombladung anschauen, wollen wir die Yang-Mills-Gleichung ableiten, die zusammen mit der Bianchi-Identität die vier homogenen Maxwell-Gleichungen liefern werden. Dazu suchen wir die stationären Punkte von

$$\mathcal{L}(\omega) = \int_K |\, \mathcal{F}_\omega \,|^2 d\mu \,,$$

wobei die Funktion $|\, \mathcal{F}_\omega \,|^2$ Lagrangedichte heißt. Vorher noch eine

Definition Sei $\Psi : P \longrightarrow V$, V ein endlich-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraum, eine glatte Abbildung von P nach V, dann heißt der topologische Abschluss der Menge $\{\pi(u) \in M |\, \Psi(u) \neq 0\}$ *projizierter Träger* von Ψ auf M.

Da $\mathcal{C}$ nach Bemerkung 2 ein affiner Raum ist, muss man nur Variationen von ω längs Verbindungsstrecken betrachten. Sei also $\omega \in \mathcal{C}$ und damit auch $\omega + \mathrm{t}\eta =: \omega_t \in \mathcal{C}$, $\eta \in \Lambda^1_G(P, \mathfrak{u}(1))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Außerdem habe η einen kompakten Träger in P. Setze $\mathcal{F} := \Omega^\omega$ und $\mathcal{F}_t := \Omega^{\omega_t}$. Wegen der Äquivarianz-Eigenschaft und wegen $Ad_g = id_{T_eG}$ (denn $U(1)$ ist abelsch!) – für ein $SU(n)$-PFB mit assoziiertem Vektorbündel $Ad(P) = P \times_{Ad} \mathfrak{su}(n)$ und $h(A,B) = Spur(A^*B)$ folgt das aus der Ad-Invarianz des inneren Produkts – ist $|R_g^* \mathcal{F}_t \,|^2 = |\, \mathcal{F}_t \,|^2$, $\forall g \in U(1)$, d.h. $|\, \mathcal{F}_t \,|^2$ ist konstant längs den Fasern von P und damit eine wohldefinierte Funktion auf $M = P/G$. Dann ist nach Bem.11 Gl. (6) $\mathcal{F}_t = d\omega_t = d\omega + \mathrm{t}d\eta$ und weiter

$$\begin{aligned} |\, \mathcal{F}_t \,|^2 d\mu &= \mathcal{F}_t \wedge * \mathcal{F}_t \\ &= |d\omega|^2 \, d\mu + 2\mathrm{t}d\omega \wedge *d\eta + \mathrm{t}^2 |d\eta|^2 \, d\mu \end{aligned}$$

Sei K ein Kompaktum in M, das den projizierten kompakten Träger von η ganz umfasst. Das *Prinzip der kleinsten Wirkung* besagt nun, dass die physikalisch relevante Feldkonfiguration gegeben ist durch Punkte ω, für die $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\mathcal{L}(\omega_t)|_{t=0} = 0$ gilt, also

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\mathcal{L}(\omega_t)|_{t=0} = 2\int\limits_M d\omega \wedge *d\eta &= 2\int\limits_K \mathcal{F} \wedge *\, d\eta \\ &= 2\int\limits_K \delta^\omega \mathcal{F} \wedge *\,\eta\,, \end{aligned}$$

Da dies für beliebige η gelten soll, folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung $\delta^\omega \mathcal{F} = 0$ bzw. $\pm * d * \mathcal{F} = 0$.

Also hat man zusammen mit der Bianchi-Identität die beiden homogenen Feldgleichungen gefunden

$$\begin{aligned} &d * \mathcal{F} = 0 && \text{(Yang-Mills-Gleichung)} \\ &d\,\mathcal{F} = 0 && \text{(Bianchi-Identität)} \end{aligned}$$

Die Bianchi-Identität ist insofern fundamentaler als sie rein geometrisch ist und daher immer gilt. In einer Karte bzgl. einer orthonormalen Rahmung ist dies äquivalent zu den klassischen homogenen Feldgleichungen. Man berechnet $*F$ zu

$$(*F_{kl}) = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also mit

$$0 = dF = \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l$$

und nach Sortieren der Koeffizienten für $(j,k,l) = (1,2,3)$ erhält man

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = \frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

und für $(j,k,l) = (0,1,2)$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} = \frac{\partial B_3}{\partial x^0} + \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\mathrm{rot}\vec{E})_3 = -\frac{\partial B_3}{\partial t}$$

analoge Rechnungen für die anderen Kompenten von dF bzw. $d * F$ liefern

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

sowie

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{rot}\vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dies sind, wie angekündigt, die homogenen Maxwell-Gleichungen der klassischen Elektrodynamik; dabei sind die ersten beiden äquivalent zur Bianchi-Identität und die letzten beiden zu den Euler-Lagrange Gleichungen.

Wendet man auf F den musikalischen Isomorphismus an, so erhält man $F^{kl} = g^{km}g^{ln}F_{mn}$, $(g^{km}) = (g_{ij})^{-1}$, d.h. in Matrixschreibweise

$$(F^{kl}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und wendet man ihn auf $*F$ an, so bekommt man

$$((*F)^{kl}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit verifiziert man sofort

$$**F = -F \quad \text{sowie} \quad \frac{1}{2}F_{kl}F^{kl} = |\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2, \quad \frac{1}{4}F_{kl}(*F)^{kl} = \vec{B}\cdot\vec{E}$$

Sei $P(M,\pi,G)$ ein PFB mit Zusammenhang ω und zugehöriger Krümmungsform Ω^ω. Wie wir im Vortrag 7 über Chern-Klassen gesehen haben berechnet sich die erste Chern-Form von (P,ω), wenn s irgendein lokaler Schnitt in P ist, zu $c_{1,\omega} = P_1(s^*\Omega^\omega) = P_1(\mathcal{F}) = \frac{i}{2\pi}\mathrm{Spur}(\mathcal{F})$.
Für ein $U(1)$-Prinzipalfaserbündel mit global definierter Feldstärke $\mathcal{F} = -\mathrm{i}\,F$ vereinfacht sich dies zu $\frac{1}{2\pi}F$, so dass man für die erste Chern-Klasse $c_1(P) = [c_{1,\omega}] = \frac{1}{2\pi}[F]$ erhält . Weiterhin hatten wir gesehen das die k-ten Chern-Klassen und insbesondere die erste Chern-Klasse unabhängig von der Wahl des Zusammenhangs auf dem Bündel und damit ein charakteristikisches Datum des Bündels selbst ist.

Das alles wurde eigentlich nur für Vektorbündel E über M gezeigt, gilt aber für Prinzipalbündel $P(M,\pi,G)$ genauso, da die lokalen Zusammenhangs- und Krümmungsmatrizen von Prinzipal- und zugehörigem assoziierten Vektorbündel übereinstimmen. Wir wollen nun umgekehrt mit einem lokal definierten Eichpotential starten und schauen, was dies für ein PFB über der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit bedeutet.
Betrachte dazu das

Beispiel einer Coulombladung(-squelle) mit Ladungszahl $n \in \mathbb{Z}$, die zeitlich konstant im räumlichen Ursprung vom $\mathbb{R}^3$ sitzt und somit im Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{1,3}$ die x^0-Achse als Weltlinie hat.
Sei also $M = \mathbb{R}^{1,3} - \{(x^0,0,0,0) \in \mathbb{R}^{1,3} \,|\, x^0 \in \mathbb{R}\}$ und definiere $A = A_i dx^i := -\frac{n}{r}dx^0$, $n \in \mathbb{Z}$, $r^2 := (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$.

Man berechnet

$$(F_{ij}) = \frac{n}{r^3}\begin{pmatrix} 0 & -x^1 & -x^2 & -x^3 \\ x^1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. $\vec{B} = 0, \quad \vec{E} = \frac{n}{r^3}\vec{r}, \quad$ mit $\quad \vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$ und hat damit das klassische Coulomb-Feld einer Ladungsquelle mit Ladung(-szahl) n im Ursprung erhalten.

Die wichtige Beoabachtung ist nun:
$A = -\frac{n}{r}dx^0$ ist global definiert auf M und erfüllt global $F = dA$.
$\Rightarrow$ F ist exakt auf $M \Rightarrow$ die erste Chern-Klasse verschwindet auf M.
$\Rightarrow$ Ein $U(1)$-PFB über M, welches eine Zusammhangsform ω erlaubt, deren zugehörige Krümmungsform Ω^ωgerade wieder F liefert, d.h. $s^* \Omega^\omega = F$ für eine beliebigen lokalen Schnitt s in P, muss das triviale Bündel sein.

Da dies für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, heißt das: Eine Änderung der elektrischen Ladung(-szahl) n zieht keinen Wechsel des Prinzipalfaserbündels nach sich, oder anders ausgedrückt: Die Ladung(-szahl) ist nicht in der Topologie des Prinzipalfaserbündels codiert.
Dieses Resultat ist insofern erstaunlich als sich die Situation für den Dirac'schen magnetischen Monopol als anders herausstellt. Die Änderung der magnetischen Ladung(-szahl) eines magnetischen Monopols erzwingt sehr wohl den Übergang zu einem anderen PFB.
Die magnetische Ladung ist also topologischer Natur, was unter anderem im nächsten Vortrag gezeigt werden wird.

Literatur

[1] G.L. Naber: *Topology, Geometry, and Gauge Fields*, Vol. Interactions, Springerverlag

[2] Mikio Nakahara: *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, Institut of Physics Publishing

[3] K.B. Marathe, G. Martucci: *The Mathematical Foundations of Gauge Theories*, Studies in Mathematical Physics Vol. 5

[4] David Bleecker: *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley Publishing Company

[5] Frank Klinker: *Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln und Instantonen auf S^4*, Diplomarbeit im Fachbereich Mathematik/Informatik der Universität Osnabrück von 2000