Übungen zur Vorlesung „Analysis auf Mannigfaltigkeiten“ im WS 2002/03

Blatt 4 18. November 2002

---

1 Sei $M = T^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ der Standard-Torus und $W := \Lambda^* T^* M$ das Formenbündel. Berechnen Sie das Spektrum des zugehörigen Dirac-Operators.

2 Sei M eine orientierte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass für jeden glatten Schnitt $\varphi \in \Gamma(W)$ eines Clifford-Bündels W über M gilt:

$$D(\omega_{\mathbb{C}} \cdot \varphi) = (-1)^{n-1} \omega_{\mathbb{C}} \cdot (D\varphi).$$

3 Sei M eine n-dimensionale kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, $k \in \{0, \ldots, n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Schnittform

$$S : H^k(M) \times H^{n-k}(M) \to \mathbb{R}, \qquad ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

wohldefiniert ist, d.h. für alle Representanten $\alpha' \in [\alpha]$ und $\beta' \in [\beta]$ gilt

$$\int \alpha' \wedge \beta' = \int \alpha \wedge \beta.$$

(b) Sei nun $n = 2m$ gerade. Zeigen Sie, dass für $k = m$ dann

$$S([\beta], [\alpha]) = (-1)^m S([\alpha], [\beta]).$$

Abgabe: Möglichst Montag, 25.11.02 oder spätestens am darauf folgenden Donnerstag.

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/analysis`