Musterlösung Funkt.theo. im SS 2001

Dr. Bernd Ammann, Universität Hamburg

Blatt 10 12. Juni 2001

---

4 Es sei $f(z) := \frac{1}{e^z-1}$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ die Laurent-Entwicklung von f auf einer punkierten Kreisscheibe um den Nullpunkt.

(a) Zeigen Sie: $a_{-k} = 0$ für $k \geq 2$.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_{-1} und a_0.

(c) Zeigen Sie: $a_{2k} = 0$ für $k \geq 1$.

(d) Zeigen Sie: Für die Koeffizienten mit ungeradem positivem Index gilt die folgende Rekursionsformel:

$$\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{2\cdot(2k)!} + \sum_{r=1}^{k} \frac{a_{2r-1}}{(2k-2r+1)!} = 0$$

Lösung: Man sieht leicht, dass f meromorph ist und in 0 einen Pol erster Ordnung besitzt. Hieraus folgt (a).

Es gilt

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} z^s = 1,$$

also für alle $m \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n+s=m, s\geq 1} a_n \frac{1}{s!} = \delta_{m0}.$$

In anderen Worten:

$$\sum_{n=-1}^{m-1} a_n \frac{1}{(m-n)!} = \delta_{m0}.$$

Dies bedeutet für $m = 0$: $a_{-1} = 1$, und für $m = 1$: $a_0 = -(1/2)$.

Man sieht leicht, dass

$$f(z) - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

eine ungerade Funktion ist, woraus (c) folgt. Schliesslich setze man $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\frac{1}{(2k+1)!} + \frac{1}{2(2k)!} + \sum_{n=1}^{2k-1} a_n \frac{1}{(2k-n)!} = 0.$$

Wenn wir n durch $2r-1$ substituieren, folgt die Rekursionsformel.

Abgabe: Dienstag, 19. Juni 2001 vor der Vorlesung

Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Gruppennummer auf Ihren Lösungen an.

`http://www.math.uni-hamburg.de/home/ammann/ft`